

EL PROBLEMA DE MALFATTI

CONSIDERACIONS HISTÒRIQUES I DEMOSTRACIONS GEOMÈTRICO-PROJECTIVES

(Acabament)

§ 13. — A més dels tres casos generalisats de què hem parlat al començament d'aquest paragraf, donà Steiner un cas, que podríem anomenar *degradat*, que consisteix en suposar que un dels costats del triangle és una de les tangents comuns a dos cercles de Malfatti. Com que hem vist que'ls lemes de Hart són iguals en el pla que en l'esfera, explicarem aquest cas d'una manera general. Sia, doncs, ABC un triangle rectilini (o esfèric); sien (a)(b) i (c) tres cercles de Malfatti, tangents (a) a AB, AC, (b) i (c) en els punts A_1 , A_2 , γ i β ; (b) a BA en B_1 i a BC i (c) en el mateix punt H; i (c) a CA en C_2 . Sia α el punt de BC en què concorren les rectes (o cercles màxims), tangents interiorment en β i γ a les parelles (a)(c) i (a)(b); i allarguem aqueixes rectes (o cercles màxims) fins que $\alpha\beta$ talli AC en N i a AB en P i $\alpha\gamma$ talli AB en M i AC en Q. N és el punt de contacte de AC amb un cercle (b_1) inscrit en el triangle $C\alpha Q$; car considerant traçat aqueix cercle i essent U i V els seus punts de contacte amb αC i αQ tindrem

$$CN - QN = CC_2 - QA_2 = CH - Q\gamma = C\alpha - Q\alpha \quad (17)$$

que és propietat del punt de contacte del cercle inscrit en el triangle $C\alpha Q$.

Pel mateix procediment trobaríem que M és punt de contacte d'un cercle (c_1) inscrit (prescindim que sigui interiorment o exteriorment) en el triangle $B\alpha P$. I tindríem també anomenant respectivament K i L els punts de contacte de (c_1) amb αP i αB (o BC)

$$NK = N\beta + \beta K = NA_2 + MA_1 = \gamma V + M\gamma = MV \quad (18)$$

o sia la tangent NK (o cercle màxim tangent) traçada del punt N del cercle (b_1) al cercle (c_1) és igual a la tangent MV (o cercle màxim tangent) traçada

del punt M del segon cercle (c_1) al primer (b_1). Podem, doncs, aplicar els dos lemes de Hart (o els seus generalisats a l'esfera) dient que puix els tres cercles (a)(b_1)(c_1) tenen dues tangents comuns exteriors a (a)(b_1) i (a)(c_1), $\alpha\gamma$ i $\alpha\beta$, i una interior BC a (b_1) i (c_1) concurrents en un mateix punt α , l'altre tangent interior de (b_1) i (c_1) passarà per A, punt de concurs de les altres dues tangents exteriors AB i AC a les parelles (a)(c_1) i (a)(b_1). I la fórmula (18) ens permet aplicar el segon lema de Hart als cercles (b_1) i (c_1), la qual cosa ens diu que són vistes de A, punt d'intersecció de les tangents (o cercles màxims tangents) en M i N als cercles (c_1) i (b_1) segons el mateix angle; i com que pel primer lema de Hart hem vist que dues tangents es confonen en una, aquesta ha d'ésser la bisectriu (o cercle màxim bisector) de l'angle BAC. De la qual cosa es desprèn la següent construcció:

«Donat el triangle rectilini (o esfèric) ABC, es traça la bisectriu (o cercle màxim bisector) d'un dels angles A del mateix fins que talli el costat oposat. En els dos triangles així formats s'inscriuen dos cercles (b_1) i (c_1) que tinguin el costat BC i la bisectriu traçada com a tangents comuns interiorment. Dels punts de contacte de cadaun d'aquests dos cercles amb AB i AC hom traça tangents a l'altre. El cercle (a) de Malfatti és tangent als costats AB, AC i a aqueixes dues tangents; el cercle (b) a BA i BC i a la traçada del punt de contacte de AB amb (c_1) i el cercle (c) a CA i CB i a la traçada del punt de contacte AC amb (b_1).»

§ 14. — Afegim un tercer cas *degenerat* del problema de Malfatti, i és quan dos dels costats de ABC són les tangents en els punts de contacte de dues parelles de cercles de Malfatti. En aqueix cas no són necessaris els lemes de Hart i la solució és molt més senzilla. Sia el triangle ABC i sien (a), (b), (c) els tres cercles de Malfatti, tangents (a) i (b) a AB en el punt M i (a) i (c) a AC en el punt N i (b) i (c) en el punt A'; i a més sien B_1 i C_1 els punts de contacte de BC amb (b) i (c) respectivament. El punt A estarà en la recta (o cercle màxim) tangent comú interiorment en A' a (b) i (c), puix és el punt d'intersecció de les rectes (o cercles màxims) AB i AC tangents en M i N a les parelles (a)(b) i (a)(c). La recta (o cercle màxim) AA' tallarà BC en un punt T tal que

$$\begin{aligned} TB - TC &= TB - TA' - TC + TA' = TB - TB_1 - TC + TC_1 = BB_1 - CC_1 = \\ &= BM - CN = BA - CA \end{aligned} \quad (19)$$

cosa que'ns indica que T és el punt de contacte del cercle inscrit en el triangle ABC amb el costat BC. La senzilla construcció que's dedueix és la següent: *Donat el triangle ABC s'inscriu un cercle i s'uneix el punt de contacte T d'aquest amb BC, per medi d'una recta (o cercle màxim) amb el vèr-*

tex A. Hom inscriu en els triangles ABT i ACT dos cercles (b) i (c) tangents en el mateix punt A' a AT , i aquests són dos dels cercles de Malfatti. El tercer (a) és tangent a AB i AC respectivament en els mateixos punts M i N que (b) i (c).

§ 15.—Ja hem dit al principi d'aquest capítol que el segon i tercer cas generalisats del problema de Malfatti, es redueixen al primer per medi d'una transformació projectiva, que podria no ésser real. Les demostracions dels lemes de Hart es fan cada vegada més artificioses, perdent aquella elegancia que tenen en el cas ordinari. Schröeter (1873), Godt (1878) i Petersen (1880), en diferents articles del *Journal de Crelle* volgueren prescindir dels lemes de Hart per a demostrar la construcció de Steiner, fent-se en això, que aquest no havia jutjat necessaris aqueixos lemes, puix essent tan artificiosos i essencials per a la demostració de Hart, no'n fa cap esment. Donarem, doncs, demostracions de la construcció més amotllades amb el geni matemàtic de Steiner, que revelà aqueix en els lemes que proposava dels feixos i rets de cercles en un pla.

Donarem, doncs, una demostració, que podem anomenar *sintètico-projectiva*. No farem cap compte de mesures de longituds; si parlem de relació projectiva no entendrem l'anarmònica de Steiner i Chasles, sinó la de Staudt, que prescindeix de la noció de nombre (almenys al principi). Aquesta demostració és calcada de la de Godt per al cas de tres cercles en un pla, que no és altra cosa que l'aplicació dels lemes de Steiner i del procediment de Schröeter per a demostrar la construcció general. Aquest trànsit, que en la meua Memoria de doctorat el feia progressiu del cas més senzill del triangle pla i esfèric i després dels tres cercles en el pla i en l'esfera a l'últim (per projectivitat), de tres còniques damunt d'una quàdriga, era poc elegant, i amb justa raó, no acabava de satisfer al gran matemàtic català i importador a Espanya dels nous i fecunds procediments de la Geometria projectiva, D. Eduard Torroja, Catedràtic de Geometria Superior i Descriptiva ja fa molts anys en l'Universitat Central de Madrid i molt conegut, entre altres treballs, per les seves obres de Geometria de Posició i Curves no-planes i Superfícies desenrotllables. Aquest distingit i venerat mestre, el nom del qual és pronunciat amb respecte per tots els que hem tingut la sort d'ésser els seus deixebles (com deia fa tres anys en el seu discurs inaugural de curs a l'Universitat d'Oviedo, el més aprofitat d'ells), m'instà a cercar una veritable demostració elegant i purament geomètrica de l'últim cas més general, valent-me dels principis de la Geometria de posició. No vaig tenir la sort de trobar-la llavors, i ocupacions molt diverses m'han tingut distret en aqueixos deu anys i no m'han permès satisfer aquest desig del benvolgut mestre. Al donar-la després de tant

de temps no'm queda més que donar-li les gracies per l'indicació i oferir-li aqueix pobre treball com a testimoni d'agraïment envers un dels fills més assenyalats de nostra amada Catalunya.

IV.—DEMOSTRACIÓ SINTÈTICO-PROJECTIVA DE LA CONSTRUCCIÓ DE STEINER

§ 16. — Sia donat el següent problema: *Donades damunt d'una quàdrlica o superfície de segón ordre, tres seccions planes (a), (b), (c) qualsevolga, trobar damunt de la mateixa superfície tres altres seccions planes (x₁), (x₂), (x₃), tangents (x₁) a (b), (c), (x₂), (x₃); (x₂) a (a), (c), (x₁), (x₃); i (x₃) a (a), (b), (x₁), (x₂) respectivament.*

Per a provar la construcció de Steiner hem de donar uns quants lemos que anomenarem de Steiner i altres que denominarem de Schröeter, segons sigui de l'un o de l'altre el lema corresponent dels feixos de cercles.

§ 17. LEMA I (Steiner). — *Dues còniques damunt d'una quàdrlica determinen un feix; l'eix d'aquest feix és l'intersecció dels plans de les dues seccions; la polar d'aquest eix conté els dos punts, vèrtexs dels dos cons de segón ordre que tallen la quàdrlica segons les dues seccions donades.*

La primera i segona part d'aqueix lema consten per les definicions que vam donar en nostre article anterior (*). Anem a provar la tercera: sien (a) i (b) les dues seccions i e la recta d'intersecció de llurs plans; prenem un punt M qualsevol de (a) i tracem la tangent m fins que talli e en el punt K. Per K tracem una de les dues tangents que's poden traçar a (b); sia n la tangent i N el seu punt de contacte amb (b). La recta MN talla e' polar de e respecte de la quàdrlica, puix la polar de MN talla l'eix e en el punt K, ja que'ls plans polars μ i ν de M i N són els tangents a la quàdrlica en M i N, puix aqueixos punts pertanyen a la superfície; i si μ conté a m i ν a n, la recta $\mu\nu$ passa per K, intersecció de m i n.

Sia O el punt d'intersecció de MN amb e' i d'ell com a centre projectem la cònica (a) damunt del pla de la cònica (b); la projecció serà una cònica que tindrà comuns amb la (b) l'involució de punts damunt de l'eix e (puix (a) i (b) són còniques d'una mateixa quàdrlica i per tant han de tenir la mateixa involució damunt la recta e d'intersecció de llurs plans), el feix de polars, el centre del qual serà el punt E' d'intersecció de e' amb el pla de (b) (puix el feix de plans d'eix e' en involució respecte de la quàdrlica talla els plans de (a) i (b) segons feixos de rectes projectius en involució respecte de les seccions (a) i (b)), i a més el punt M de (a) s'escau damunt del punt N de (b) perquè hem pres O com a centre de projecció. La cònica (a),

(*) ARXIUS, any II, n.º 3.

doncs, amb tot el seu sistema polar es projecta damunt la cònica (b), o sia (a) i (b) són homològiques, essent O el centre i e l'eix d'homologia. I això ens prova que el punt O no depèn dels punts M i N, puix altres punts P i Q es projecten de O com a centre l'un sobre l'altre, igual que llurs tangents corresponents. Mes com de K hauríem pogut traçar altra tangent n_1 a més de la n , resulten dues homologies, els centres O i O_1 de les quals són damunt de e' com devíem provar.

§ 18. COROL·LARI. — O i O_1 estàn harmònicament separats pels plans de (a) i (b); car el pla OO_1M talla (a) en altre punt M_1 i (b) en N i N_1 . N és el corresponent de M respecte de O i N_1 respecte de O_1 ; N_1 serà el corresponent de M_1 respecte de O i N respecte de O_1 , puix no hi poden haver altres punts corresponents, havent-se tots de trobar en aqueix pla. La figura $OO_1MM_1NN_1$ és, doncs, un quadrilàter complet i els vèrtexs OO_1 estàn harmònicament separats per les diagonals MM_1 i NN_1 , que estàn en els plans de (a) i (b) respectivament; també es dedueix d'aquest quadrilàter que O i O_1 són conjugats respecte la quàdrica.

§ 19. LEMA II (Steiner). — *Els plans polars dels punts O i O_1 de e' , centres d'homologia de les còniques (a) i (b) tallen la quàdrica segons dues seccions (p) i (p_1) (que Steiner anomena de potencia, perquè en el cas dels cercles en un pla són dos cercles de centre els d'homotecia i radis les arrels quadrades de les potències d'inversió), del feix (a)(b) harmònicament separades per aqueixes seccions (a) i (b) i també per les seccions d'aquest feix (a)(b) que's redueixen a dues rectes situades en plans tangents.*

Són corol·laris del que hem acabat de dir: si O i O_1 són conjugats respecte de la quàdrica, el pla de (p) conté O_1 i el pla de (p_1), O i són també conjugats; estàn, doncs, harmònicament separats pels plans dobles de l'involució d'eix e , pel qual passen per ésser polars de O i O_1 , punts de e' ; aqueixos plans dobles no són sinó els del feix e tangents o sia que tallen la quàdrica segons dues rectes. Per passar el pla de (p) per O_1 i el de (p_1) per O i estar O i O_1 harmònicament separats pels plans de (a) i (b), també ho estaràn els plans de (p) i (p_1).

§ 20. LEMA III (Steiner). — *Les seccions (c) i (d) els plans de les quals passen per e i estàn harmònicament separats pels de les seccions de potencia (p) i (p_1), són també homològiques respecte de O i O_1 .*

Car, projectant la secció (c) damunt el pla de (d), del punt O com a centre de projecció, el punt d'intersecció K de qualsevol projectant h amb el pla de (d) serà l'harmònic conjugat del punt H de (c) pel qual passa h respecte de O i del pla de (p), puix els plans de (c) i (d) per hipòtesi són harmònics conjugats respecte dels de (p) i (p_1) i O està en (p_1) [Lema 2.^{on}]; mes com per altra part O i el pla de (p) són pol i pla polar respecte de la superfície, l'harmònic conjugat K d'un punt H d'ella, ha d'estar també damunt de la quàdrica i per això damunt de (d) intersecció del seu pla amb la quàdrica. (c) i (d) són, doncs, homològiques respecte de O i O_1 com a centres.

§ 21. LEMA IV (Steiner).—*Les seccions els plans de les quals passen per O (o per O_1) formen una ret de còniques damunt de la superfície, que tallen isogonalment les còniques conjugades del feix e respecte de les seccions de potencia (p) i (p_1) .*

Tallar isogonalment vol dir que són projectius els feixos que formen en cadaún dels punts d'intersecció les generatrius rectes de la superfície i les tangents a les seccions secants.

Per a provar el lema considerem una secció secant qualsevulga (s) , el seu pla passant per O. El pla de (s) tallarà el con que conté les seccions (a) i (b) en dues generatrius. Sia OM una d'elles i sien M i N els punts de (a) i (b) que li estan damunt; sien, a més, m i m_1 les generatrius de la quàdriga que passen per M i n i n_1 les que passen per N; les tangents en M a (a) i (s) anomenem-les t_M i q_M , i a les tangents en N a (b) i (s) anomenem-les t_N i q_N . Els feixos de rectes $(m m_1 t_M q_M)$ i $(n_1 n t_N q_N)$ diu el lema que són projectius, car les quatre primeres rectes estan en el pla tangent a la quàdriga en M i les quatre segones en el pla tangent en N, i cadauna de les quatre primeres rectes talla la seva corresponent, puix, 1.^{er}, m i n_1 són generatrius de distint sistema i igualment m_1 i n ; 2.^{on}, t_M i t_N estan en el pla tangent al con que passa per $(a)(b)$ al llarg de la generatriu OMN, i 3.^{er}, q_M i q_N estan en el pla de la secció (s) . Els dos feixos $(m m_1 t_M q_M) \bar{\wedge} (n_1 n t_N q_N)$ són perspectius al mateix feix de plans d'eix MN.

§ 22. LEMA V (Steiner) (recíproc de l'anterior).—*Les seccions (s) isogonals de dues seccions (a) i (b) pertanyen a la ret O o a la ret O_1 dels seus centres d'homologia.*

Car si per hipòtesi tenim que (s) talla (a) i (b) en dos punts M i N (no sabem si MN passen per O) tals que $(m m_1 t_M q_M) \bar{\wedge} (n_1 n t_N q_N)$, les parelles $m m_1$, $m_1 n$ i $q_M q_N$ estan en tres plans que passen per MN, i els dos feixos dits seràn perspectius al mateix feix de plans d'eix MN. t_M i t_N seràn, doncs, dues tangents que es tallen en un punt K de la recta e , eix del feix $(a)(b)$. MN serà, doncs, generatriu d'un dels cons O i O_1 . El pla de (s) passarà per O o per O_1 , que vol dir que (s) pertany a una de les rets de còniques els plans de les quals passen per O o O_1 .

§ 23. COROL·LARI. — Les seccions de la ret O tangents a (a) , ho seràn també a (b) ; puix si t_M i q_M es confonen, també es confondrán les corresponents projectives t_N i q_N . (b) i (s) tenen llavors la mateixa tangent en el punt N; seràn, doncs, tangents.

I recíprocament les seccions tangents comuns a (a) i (b) pertanyen a una de les rets O o O_1 ; puix si t_M i q_M es confonen igual que t_N i q_N , els feixos $(m m_1 t_M q_M)$ i $(n_1 n t_N q_N)$ són necessàriament projectius.

§ 24. — Els punts de contacte d'una secció tangent comú a dues seccions (a) i (b) són punts corresponents en una de les homologies i llur recta d'unió passa per O o per O_1 . Corol·lari que es desprèn evidentment de l'anterior, i igual diríem del recíproc: per a traçar una secció tangent

comú a dues seccions donades (a) i (b), hem de pendre com a punts de contacte, dos punts homòlegs respecte d'alguna de les homologies O o O_1 .

Els punts d'intersecció d'una secció isogonal a dues seccions donades estàn també damunt d'una de les generatrius dels cons O o O_1 que contenen (a) i (b) a l'hora.

Els plans de totes les seccions isogonals o tangents comuns a dues seccions donades (a) i (b) són conjugats dels plans d'una o altra de les seccions de potencia (p) o (p_1) de les seccions (a)(b).

§ 25. LEMA VI (Steiner).—*Dues seccions secants tenen la mateixa raó anarmònica en els dos punts d'intersecció, o sia, els feixos de quatre rectes, formats per les generatrius i les tangents a les seccions en els punts d'intersecció, són projectius.*

Car si (a) i (b) són les dues seccions, P i Q els seus punts d'intersecció, p i p_1 les generatrius que passen per P , i q i q_1 les que passen per Q , p_a i p_b les tangents a les seccions (a) i (b) en el punt P , i q_a i q_b les tangents en el punt Q a les mateixes (a) i (b), els feixos de rectes ($p p_1 p_a p_b$) i ($q_1 q q_a q_b$) són projectius, puix són el primer, quatre rectes passant per P i situades en el pla tangent en P a la quàdriga, i el segon, també quatre rectes passant per Q i situades en el pla tangent en Q a la mateixa superfície; i a més, p talla q_1 , per ésser generatrius de diferent sistema, i p_1 q per la mateixa raó, i p_a i q_a estàn en el pla de (a) i p_b i q_b en el pla de (b), i així també es tallen. Els dos feixos ($p p_1 p_a p_b$) i ($q_1 q q_a q_b$) són, doncs, perspectius al mateix feix de quatre plans, l'eix PQ format pels plans tangents $p q_1$ i $q p_1$, el de (a) i el de (b). Són, doncs, projectius, o sia, $(p p_1 p_a p_b) \wedge (q_1 q q_a q_b)$.

§ 26. COROL·LARI.—*Dues seccions conjugades es tallen ortogonalment, o sia, els feixos formats per les generatrius i les tangents en els punts d'intersecció són harmònics. Car si el pla de (a) passa per el pol B del pla de (b) i a l'inrevés, els plans de (a) i (b) estàn harmònicament separats pels plans tangents $p q_1$ i $q p_1$ que's poden traçar per llur intersecció PQ . Els feixos, doncs, ($p p_1 p_a p_b$) i ($q_1 q q_a q_b$) són harmònics.*

Les seccions isogonals a dues seccions donades són ortogonals a una de les seccions de potencia de les dues donades, car llurs plans han de passar pel pol O o O_1 d'una d'elles.

Les seccions d'un feix d'eix e són ortogonals a les seccions d'un feix d'eix e' polar de e i recíprocament, car el pla de qualsevolga secció del primer feix passa pel pol del pla de qualsevolga secció del segon feix en virtut del teorema de G. de P., que diu que'l pol d'un pla està damunt de la polar de qualsevolga de ses rectes.

§ 27. LEMA VII (Steiner).—*Tres seccions (a) (b) (c) que no pertanyen a un mateix feix, tenen sis centres d'homologia que formen un quadrilàter complet, tres a tres en linia recta en quatre rectes.*

Car sia O un centre d'homologia del parell (a)(b) i O' un del pa-

rell $(a)(c)$. Una secció qualsevolga (s) que passi per O i O' , serà isogonal al primer i al segon parell, o sia a les tres seccions $(a)(b)(c)$; per tant també el parell $(b)(c)$ i passarà per un dels centres O'' d'homologia de $(b)(c)$. Perquè es vegi més clara la relació, suposem que (s) talla (a) en els punts M i N , (b) en els punts P i Q , i (c) en els punts U i V . Sien $m m_1$, $n n_1$, $p p_1$ $q q_1$, $u u_1$ i $v v_1$ els sis parells de generatrius de la quàdriga que passen pels sis punts de la mateixa M, N, P, Q, U i V ; i sien t_M i t_N les tangents a (a) en M i N , t_P i t_Q les tangents a (b) en P i Q , t_U i t_V les tangents a (c) en U i V i a les tangents a (s) anomenarem s_M, s_N, s_P, s_Q, s_U i s_V . En virtut del lema IV tindrem les següents relacions projectives:

$$\begin{aligned} O \dots & (m m_1 t_M s_M) \overline{\wedge} (p_1 p t_P s_P) & (n n_1 t_N s_N) \overline{\wedge} (q_1 q t_Q s_Q) & (20) \\ O' \dots & (m m_1 t_M s_M) \overline{\wedge} (u_1 u t_U s_U) & (n n_1 t_N s_N) \overline{\wedge} (v_1 v t_V s_V) \end{aligned}$$

i en virtut del lema VI

$$(m m_1 t_M s_M) \overline{\wedge} (n_1 n t_N s_N) \quad (p p_1 t_P s_P) \overline{\wedge} (q_1 q t_Q s_Q) \quad (u u_1 t_U s_U) \overline{\wedge} (v_1 v t_V s_V) \quad (21)$$

i combinant les dues equacions de l'esquerra (20) amb l'última (21) resulta (i igualment amb les de la dreta)

$$\begin{aligned} (p_1 p t_P s_P) \overline{\wedge} (u_1 u t_U s_U) \overline{\wedge} (v_1 v t_V s_V) & (23) \\ (q_1 q t_Q s_Q) \overline{\wedge} (v_1 v t_V s_V) \overline{\wedge} (u_1 u t_U s_U) \end{aligned}$$

Les dues equacions (23) en virtut del lema V, ens proven que (s) és isogonal de (b) i (c) , éssent P i V, Q i U les parelles de punts en línia recta amb un centre O'' d'homologia de (b) i (c) .

Fàcilment s'infereix del que hem dit, que'ls sis centres d'homologia formen un quadrilàter complet, que té per diagonals les polars de les tres rectes d'intersecció dels plans de $(a), (b)$ i (c) . Les seccions isogonals a les tres $(a), (b), (c)$ formen, doncs, quatre feixos de còniques damunt de la quàdriga, i llurs eixos són els quatre costats del quadrilàter; el pla d'aquest talla la quàdriga segons una secció (l'única) ortogonal a totes tres $(a)(b)(c)$. Si una secció d'aquests quatre feixos és tangent a (a) , ho serà també a (b) i (c) i a l'inrevés; així podem resoldre el problema de traçar una secció plana tangent a tres donades $(a), (b), (c)$, puix cal només trobar els quatre eixos d'homologia i traçar per cada un d'ells les dues seccions tangents a una de les donades (a) , per la qual cosa és suficient traçar les dues tangents del punt d'intersecció de l'eix d'homologia amb el pla de (a) a questa secció (a) , i fer passar per l'eix a cada tangent un pla; així obtindríem dues solucions per cada eix i en total vuit solucions. Tot això és enterament aplicable

als complexes de còniques en un pla que passen per dos punts fixes, si projectem les còniques de la quàdriga d'un punt de la mateixa com a centre, com explicàrem en nostre anterior article ja citat. Si els punts foren dos ombílics o punts cíclics d'una superfície no-reglada (el·lipsoide, hiperboloide de dues fulles, paraboloides el·líptic) i el pla de projecció paral·lel al tangent en l'ombílic a la quàdriga, llavors les seccions projectades passarien totes pels punts cíclics i serien cercles. Els lemes transformats d'aqueixa manera són els que Steiner donà propiament, encara que no li serien desconeguts els generals, puix expressament enuncià l'aplicació d'aquests lemes al cas del problema generalisat de Malfatti a tres còniques damunt d'una quàdriga. Sobre si Steiner coneixia aqueixos lemes generalisats no cal disputar; com arribava a la seva construcció pel seu medi, això ja és més fosc. El seu deixeble Schröter rebutjà els lemes de Hart i posà altres més conformes a l'estil del seu mestre. Aqueixos lemes, generalisats al cas que estudiem són els que necessitem per a la nostra demostració.

§ 28. LEMA VIII (Schröter). — Totes les seccions d'una ret de còniques els plans de la qual passen per un punt O són tallades ortogonalment per la secció (o) continguda en el pla ω polar de O ; si tenim, a més, que diverses seccions de la mateixa ret són tallades isogonalment per altra secció (g) (secció de Schröter), hi haurà tot un feix de seccions isogonals a aqueixes seccions (i d'elles dues tangents).

Car la secció (o) i la secció (g) essent isogonals, l'intersecció e de llurs plans contindrà un dels centres d'homologia de cada parell de còniques donades; les seccions doncs, els plans de les quals passin per e seràn totes isogonals a aquelles, i una d'aqueix feix e que siga tangent a qualsevulga de les donades ho serà a totes les altres, i per tant n'hi haurà dues de tangents comuns a totes.

§ 29. COROL·LARI. — Si les seccions donades passen per un punt O de la mateixa superfície (en aqueix cas O serà el centre de la ret), i tenen una secció isogonal (g) , tindran una sola nova secció tangent comú (t) . El recíproc és també veritable, i si es prova que una secció tangent és l'ortogonal (o) , aquesta s'ha de reduir a un punt O i totes les còniques passen per aquest punt O de la superfície.

§ 30. LEMA IX. — Si tenim tres seccions (a) (b) (c) , que passen totes per un mateix punt O de la superfície i a més es tallen en tres punts distints (a) (b) en C , (a) (c) en B i (b) (c) en A i fem passar una secció per O i pels seus harmònics conjugats A' i B' respecte les parelles B, C i A, C , la secció $OA'B'$ és tangent en O a (c) .

Car la forma $OAB'C$ damunt (b) essent harmònica, i igualment la $OBA'C$ damunt (a) els feixos projectants de les mateixes d'un punt de les còniques bàsiques (a) i (b) com a centre, seràn harmònics i per tant projectius. Així O ($OAB'C$) $\bar{\wedge}$ O ($OBA'C$) són projectius i tenen un raig OC comú; seràn, doncs, perspectius i els tres plans que passen pels altres tres parells

de raigs homòlegs són concurrents en una recta que passi per O. Els raigs $OO=t$ i $OO=t'$ són les tangents en O a les còniques OAB i OA'B' (puix això és unir un punt a si mateix damunt una cònica, o sia traçar la tangent en dit punt, segons els principis de la G. de P.) i el pla tt' serà el tangent O a la superfície, puix conté dues tangents t i t' a la mateixa (si t i t' suposéssim, com així és en realitat, que es confonen, ja tindríem provat el lema); els raigs OA i OB estàn en el pla OAB de la cònica (c) i els raigs OA' i OB' en el pla OA'B' de la cònica (c') i són distints del tt' ; concorren, doncs, amb aquest segons una recta OT (en què es confondrà t i t'), tangent a la superfície, puix està en el plan tangent tt' , i per tant a totes les seccions planes que per ella passen, tals com (c) i (c'); si doncs, (c) i (c') tenen la mateixa tangent en O, són seccions tangents.

Aplicant aquest lema, fàcilment veuríem ésser veritable el contrari i per tant el recíproc. Aquest teorema no és sinó la generalisació del teorema de geometria plana que diu que'ls punts mitjans dels costats d'un triangle formen un triangle de costats paral·lels al donat.

§ 31. LEMA X. — Si dues seccions (a) i (b) són tangents en un punt O, qualsevolga secció (s) que passi pel punt O les talla en altres dos punts AB, en els quals els dos parells de generatrius a, a_1 i b, b_1 del mateix sistema, les tangents t_A i t_B a les seccions donades i les tangents q_A i q_B a la secció secant en A i B formen dos feixos de quatre rectes projectius.

Car tots dos feixos són projectius al que formen en O les generatrius (invertint l'ordre dels sistemes, en virtut del lema VI) la tangent comú a les dues seccions donades i la tangent a la secció secant, que serà isogonal a les donades. Tindrem, doncs $(a a_1 t_A q_A) \overline{\wedge} (o_1 o t_o q_o) \overline{\wedge} (b b_1 t_B q_B)$.

§ 32. — I el recíproc diu així: Si dues seccions (a) i (b) són tals que tallades en dos punts A i B per una tercera secció (s), que concorre a més amb elles en un altre punt O, formen en dits punts A i B dos feixos projectius les generatrius del mateix sistema i les tangents a les seccions donades i a la secant les seccions donades (a) i (b) són tangents en el punt O.

Car per hipòtesi tenim

$$(a a_1 t_A q_A) \overline{\wedge} (b b_1 t_B q_B) \tag{24}$$

i pel lema VI

$$(a a_1 t_A q_A) \overline{\wedge} (o_1 o t'_o q_o) \quad (b b_1 t_B q_B) \overline{\wedge} (o_1 o t''_o q_o) \tag{25}$$

i de les (24) i 25 es dedueix

$$(o_1 o t'_o q_o) \overline{\wedge} (o_1 o t''_o q_o) \tag{26}$$

La (26) ens prova que les tangents en O, t'_o a (a) i t''_o a (b) es confonen en una sola recta t_o . (a) i (b), tenint en O la mateixa tangent t_o seràn tangents en dit punt O.

§ 33. LEMA XI (el gran lema de Schröter). — *Si damunt d'una quàdrica tenim tres seccions planes $(x_1)(x_2)(x_3)$ de Malfatti tangents mutuament $(x_1)(x_2)$ en M_3 , $(x_1)(x_3)$ en M_2 i $(x_2)(x_3)$ en M_1 i pels punts M_2 i M_3 fem passar una secció plana qualsevolga (g_1) que tallarà (x_2) en M_3 i en un altre nou punt C_2 , i (x_3) en M_2 i altre nou punt B_3 ; i pels punts M_1 i M_3 fem passar altra secció plana qualsevolga (g_2) que tallarà (x_1) en M_3 i en un nou punt C_1 i (x_3) en M_1 i en altre nou punt A_3 ; les seccions (g_1) i (g_2) es tallaràn en M_3 i en altre nou punt O , situat en la secció de potencia (p_3) de dues seccions planes (a) tangent en C_2 a (x_2) i en B_3 a (x_3) i (b) tangent en C_1 a (x_1) i en A_3 a (x_3) respectivament; i la secció plana (g_3) que passant per O és tangent en M_3 a (x_1) i (x_2) ho és en O a (p_3) .*

Aquest lema que fàcilment provava Schröter en el pla i que per unes poques transformacions l'estenia a la forma en què l'hem dat, el volem provar sens cap auxili de la Geometria mètrica, de la qual és independent pel seu enunciat.

Anomenem X_1, X_2, X_3 els tres pols dels plans de $(x_1), (x_2)$ i (x_3) , i unim aqueixos tres punts amb un punt O qualsevol de la superfície, que no pertany ni a cap de les seccions $(x_1), (x_2)$ o (x_3) , ni al pla $X_1 X_2 X_3$. Sien K_1, K_2 i K_3 els tres punts d'intersecció de OX_1, OX_2 i OX_3 amb la superfície. Com que la recta $X_1 X_2$ conté el punt M_3 , puix és la polar de la tangent comú en M_3 a (x_1) i (x_2) , el pla $OX_1 X_2$ passarà pels quatre punts $OM_3 K_1 K_2$ de la superfície, que estaràn, doncs, en una secció plana (y_3) ; i aiximateix trobaríem dues altres seccions planes (y_1) passant per $OM_1 K_2 K_3$ i (y_2) passant per $OM_2 K_1 K_3$. Tracem les dues seccions (g_1) i (g_2) que hem precisat en el enunciat, que passen (g_1) per $OM_2 M_3$ i (g_2) per $OM_1 M_3$ (si volguéssim començar per la construcció d'aqueixes dues seccions (g_1) i (g_2) com en l'enunciat no hi ha cap inconvenient mentre (g_1) i (g_2) siguin distintes de $(x_1), (x_2), (x_3)$ i de la secció $M_1 M_2 M_3$ que passa pels tres punts de contacte), i afegim una tercera (g_3) que passi per $OM_1 M_2$ i que tallarà (x_1) en M_2 i en un nou punt B_1 i (x_2) en M_1 i en altre nou punt A_2 . Les seccions $OM_2 K_1 K_3 = (y_2)$ i $OA_2 K_2$ són tangents en O , car el feix format en M_2 per les dues generatrius m_2, m'_2 (reals o imaginaries) i les dues tangents en M_2 a les seccions (x_3) i (g_3) en virtut del lema VI és projectiu amb el feix que en l'altre punt comú M_1 de les dues mateixes seccions (x_3) i (g_3) formen les dues generatrius m'_1, m_1 (invertit el sistema) i les dues altres tangents a les dues mateixes seccions (x_3) i (g_3) . Però essent les seccions (x_3) i (y_2) conjugades (car en el pla de (y_2) conté el pol X_3 del pla de (x_3)), la tangent en M_2 a (y_2) estarà harmònicament separada de la tangent a (x_3) en dit punt per les generatrius m_2, m'_2 (Lema VI-Corol·lari) i essent (x_3) i (y_1) també conjugades, la tangent a la mateixa (x_3) en M_1 estarà harmònicament separada de la tangent a (y_1) per les generatrius m'_1, m_1 (en la relació harmònica es pot permutar l'ordre dels elements conjugats); la tangent a (y_1) serà, doncs, el raig homòleg a la tangent a (y_2) i tindrem, doncs,

$$[m_2, m'_2, \bar{M}_2(x_3), \bar{M}_2(g_3)] \bar{\wedge} [m'_1, m_1, \bar{M}_1(x_3), \bar{M}_1(g_3)] \quad (27)$$

(designant per $\bar{H}(h)$ la tangent en el punt H a la secció (h)); i a més

$$[m_2, m'_2, \bar{M}_2(x_3), \bar{M}_2(y_2)] \bar{\wedge} (m'_1, m_1, \bar{M}_1(x_3), \bar{M}_1(y_1)) \quad (28)$$

La comparació de les fórmules (27) i (28) ens fa veure que el raig $\bar{M}_2(y_2)$ és l'homòleg del $\bar{M}_1(y_1)$ en la projectivitat (27), puix té amb la (28) tres parelles d'elements corresponents comuns. Podrem, doncs, escriure juntament aqueixes dues fórmules en la forma

$$[m_2, m'_2, \bar{M}_2(x_3), \bar{M}_2(y_2), \bar{M}_2(g_3)] \bar{\wedge} [m'_1, m_1, \bar{M}_1(x_3), \bar{M}_1(y_1), \bar{M}_1(g_3)] \quad (29)$$

Apliquem el mateix lema VI a les seccions (x_2) i (g_3) secants en M_1 i A_2 i tindrem

$$[m'_1, m_1, \bar{M}_1(x_2), \bar{M}_1(g_3)] \bar{\wedge} [a_2, a'_2, \bar{A}_2(x_2), \bar{A}_2(g_3)] \quad (30)$$

i aplicant el corol·lari del lema VI a les seccions (x_2) i OA_2K_2 (conjugades per estar el pol X_2 del pla de (x_2) en la recta OK del pla de la segona secció), obtindrem per als punts A_2 i M_1

$$[a_2, a'_2, \bar{A}_2(x_2), \bar{A}_2(OA_2K_2)] \bar{\wedge} (m'_1, m_1, \bar{M}_1(x_2), \bar{M}_1(y_1)) \quad (31)$$

Podrem, doncs, de la mateixa manera que hem fet amb les fórmules (27) i (28), fondre les (30) i (31) en la sola fórmula

$$[m'_1, m_1, \bar{M}_1(x_2), \bar{M}_1(y_1), \bar{M}_1(g_3)] \bar{\wedge} (a_2, a'_2, \bar{A}_2(x_2), \bar{A}_2(OA_2K_2), \bar{A}_2(g_3)) \quad (32)$$

Però essent (x_2) i (x_3) tangents en M_1 , resulta $\bar{M}_1(x_2) = \bar{M}_1(x_3)$, i per ésser (x_1) i (x_3) tangents en M_2 , resulta $\bar{M}_2(x_1) = \bar{M}_2(x_3)$; les fórmules (29) i (32) llavors ens donen

$$[m_2, m'_2, \bar{M}_2(x_1), \bar{M}_2(y_2), \bar{M}_2(g_3)] \bar{\wedge} [a_2, a'_2, \bar{A}_2(x_2), \bar{A}_2(OA_2K_2), \bar{A}_2(g_3)] \quad (33)$$

En virtut del recíproc del lema X, les seccions (y_2) i (OA_2K_2) concurren en O amb la (g_3) i tallades a més a més per aquesta en els punts M_2 i A_2 respectivament, seràn tangents en O, puix la fórmula (33) ens mostra que en dits punts (g_3) les talla isogonalment.

Per idèntic procediment obtindriem en els punts M_2 i C_2 la fórmula següent:

$$[m_2, m'_2, \bar{M}_2(x_1), \bar{M}_2(y_2), \bar{M}_2(g_1)] \bar{\wedge} [c_2, c'_2, \bar{C}_2(x_2), \bar{C}_2(OC_2K_2), \bar{C}_2(g_1)] \quad (34)$$

i aplicant el mateix lema X a les seccions (y_2) i (OC_2K_2) concurrents amb la (g_1) en O, i tallades a més isogonalment, segons la fórmula (34), per aquesta en els punts M_2 i A_2 respectivament, seràn també tangents en O. Si, doncs, (y_2) , (OA_2K_2) i (OC_2K_2) són tangents en O, les dues últimes seccions, tangents en O i amb un altre punt K_2 comú, seràn una sola $(OA_2C_2K_2)$, conjugada a la (x_2) , i el punt K serà l'harmònic conjugat del O respecte els A_2 i C_2 , car considerant aquests com a punts dobles d'una involució damunt d'aqueixa cònica, el punt X_2 d'intersecció de les dues tangents en ells a la base serà el centre involutiu i la recta K_1K_2O tallarà la cònica en dos punts O i K_2 conjugats en l'involució [per ésser X_2 pol del pla de (x_2) les rectes X_2A_2 i X_2C_2 seràn tangents a la superfície i per tant a la cònica en el pla de la qual són situats $(OA_2C_2K_2)$].

I de la mateixa manera trobaríem que (y_1) és tangent en O a una cònica $(OB_1C_1K_1)$ i que K_1 és l'harmònic conjugat de O respecte B_1 i C_1 ; i també que (y_3) és tangent O a una cònica $(OA_3B_3K_3)$ i que K_3 és l'harmònic conjugat de O respecte de A_3 i C_3 .

Tenim, doncs, que (y_1) , (y_2) i (y_3) són tres seccions concurrents en O i en altres tres punts diferents K_1 , K_2 i K_3 , i que per O fem passar tres altres seccions $(OB_1C_1K_1)$, $(OA_2C_2K_2)$ i $(OA_3B_3K_3)$ tangents a (y_1) , (y_2) i (y_3) respectivament i passant pels punts d'intersecció K_1 , K_2 i K_3 de les altres dues. És, doncs, aplicable el recíproc del lema IX i així obtindrem, anomenant A_1 , B_2 i C_3 les interseccions dels parells $(OA_2C_2K_2)$ $(OA_3B_3K_3)$, $(OB_1C_1K_1)$ $(OA_3B_3K_3)$ i $(OB_1C_1K_1)$ $(OA_2C_2K_2)$, que K_1 és l'harmònic conjugat de O respecte B_2 i C_3 , K_2 l'harmònic conjugat del mateix O respecte A_1 i C_3 i K_3 l'harmònic conjugat de O respecte A_1 i B_2 .

§ 34. — Però M_2 i M_3 són els punts de contacte d'una secció plana (x_1) amb altres dues (x_2) i (x_3) ; en virtut del lema V, corol·lari 3, la recta M_2M_3 passa pel vèrtex de l'únic con que conté les dues còniques (x_2) i (x_3) (l'altre con ha degenerat en els dos plans de (x_2) i (x_3) essent M_1 el vèrtex hipotètic) i (g_1) que passa per aqueixos dos punts M_2 i M_3 serà isogonal a les dues seccions (x_2) i (x_3) (Lemes IV i V) i els altres dos punts d'intersecció C_2 i B_3 seràn corresponents en l'homologia de (x_2) i (x_3) (Lemes V i VI, corol. 2); podrem, doncs, traçar una secció (a) tangent a (x_2) en C_2 i a (x_3) en B_3 i de la mateixa manera altra (b) tangent a (x_1) en C_1 i a (x_3) en A_3 i altra (c) tangent a (x_1) en B_1 i a (x_2) en A_2 . El pol A del pla de la secció (a) ha de trobar-se damunt de les rectes X_3B_3 i X_2C_2 ; car éssent (a) tangent en B_3 a (x_3) , tindrà en B_3 la mateixa tangent, que serà l'intersecció de llurs plans i per tant els seus pols A i X_3 estaràn damunt de la tangent conjugada o polar respecte de la quàdriga; i igual cosa direm de (a) i (x_2) tangents en C_2 . Si, doncs, A està damunt de X_3B_3 i X_2C_2 estarà damunt de la recta d'intersecció dels plans OX_3B_3 i OX_2C_2 que, puix

$OX_3 = OK_3$ i $OX_2 = OK_2$, seràn els plans de les seccions $(OA_3B_3K_3)$ i $(OA_2C_2K_2)$, la recta d'intersecció de les quals hem dit ésser OA_1 . També veuríem que OB_1 passa per B, pol del pla de (b) , i OC_1 passa per C, pol del pla de (c) .

Com que (x_3) és tangent comú a (a) i (b) en els punts B_3 i A_3 respectivament, en virtut del Lema V i de sos corol·laris, el vèrtex d'un dels cons que passa per (a) i (b) està en la recta A_3B_3 i en virtut del lema I en la recta AB ; anomenem, doncs, P_3 el punt d'intersecció d'aqueixes dues rectes AB i A_3B_3 , vèrtex de dit con. En el pla de la cònica $(OA_1A_3B_2B_3K_3)$ o sia en el pla $OABX_3$ busquem la polar de P_3 ; passarà pels pols de les dues rectes que'l determinen, o sia de AB i A_3B_3 . El pol de A_3B_3 és X_3 , punt d'intersecció de les dues tangents en dits punts A_3 i B_3 a la cònica (cosa conforme amb el lema II). El pol de AB el trobarem com a punt d'intersecció de les polars de A i de B. Anomenant \mathfrak{A} i \mathfrak{B} els harmònics conjugats de A_3 respecte de O i B_2 i de B_3 respecte de O i A_1 damunt de la cònica $(OA_1B_2K_3)$, tindrem que \mathfrak{A} i \mathfrak{B} seràn els punts de contacte de les segones tangents que ultra AB_3 i BA_3 hom pot traçar de A i B a la cònica, puix A i B seràn els centres involutius de dues involucions els punts dobles de les quals sien A_3 i \mathfrak{A} , i B_3 i \mathfrak{B} i O tingui per conjugats A_1 i B_2 respectivament. Tindrem, doncs, per ésser formes harmòniques

$$(OB_3 A_1 \mathfrak{A}) \bar{\wedge} (OA_3 B_2 \mathfrak{B}) \text{ o sia } (OA_1 B_3 \mathfrak{B}) \bar{\wedge} (OB_2 A_3 \mathfrak{A}) \quad (35)$$

Mes ja hem trobat abans que K_3 estava harmònicament separat de O respecte dels parells A_3B_3 i A_1B_2 . O i K_3 seràn punts dobles d'una involució $(OO K_3 K_3 A_3B_3 A_1B_2)$; tindrem, doncs,

$$(OA_1 B_3 K_3) \bar{\wedge} (OB_2 A_3 K_3) \quad (36)$$

Comparant la (35) amb la (36), es veu que \mathfrak{B} i \mathfrak{A} són punts homòlegs de l'involució considerada, puix tenen tres parells d'elements corresponents idèntics les dues projectivitats que representen i la segona hem vist i dit que era involutiva.

En virtut d'aquesta involució podem escriure

$$(OK_3 A_3 \mathfrak{A}) \bar{\wedge} (OK_3 B_3 \mathfrak{B}) \quad (37)$$

i com que en tota projectivitat de quatre membres es poden invertir dos elements, si invertim els altres dos,

$$(OK_3 A_3 \mathfrak{A}) \bar{\wedge} K_3 O \mathfrak{B} B_3) \quad (38)$$

Com que'ls elements O i K_3 en la projectivitat representada per la

fórmula (38) es corresponen doblement, serà una involució i les tres rectes OK_3 , $A_3\mathfrak{B}$ i $B_3\mathfrak{A}$ concorren en un punt, el centre involutiu R . Però $A_3\mathfrak{B}$ és la polar de B perquè uneix els punts de contacte de les dues tangents que es poden traçar de A i per la mateixa raó $B_3\mathfrak{A}$ és la polar de A . R serà, doncs, el pol de AB i estarà en línia recta amb O i K_3 per l'última involució. La polar, doncs, que busquem de P_3 , intersecció de A_3B_3 i AB , serà la recta X_3R que uneix els dos pols X_3 i R de dites rectes. Però X_3 i R estan en línia recta amb O i K_3 ; la recta OK_3 serà, doncs, la polar de P_3 i les dues tangents en O i K_3 a la cònica $(OA_1B_2K_3)$ passaràn per P_3 que serà centre involutiu de l'involució primera $(OO K_3K_3 A_3B_3 A_1B_2 \mathfrak{A}\mathfrak{B})$ i punt d'intersecció de les sis rectes: AB , A_3B_3 , A_1B_2 , $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ i les tangents en O i K_3 a la cònica $(OA_1B_2K_3)$.

La secció de potencia (p_3) de (a) i (b) serà la continguda en el pla polar de P_3 , vèrtex del con que passa per (a) i (b) . Aquest pla polar contindrà la recta OK_3 , polar de dit punt P_3 respecte d'una cònica $(AO_1B_2K_3)$ de la quàdriga, el pla de la qual passa per P_3 ; els punts O i K_3 seràn, doncs, de dita secció (p_3) de potencia de (a) i (b) . Queda, doncs, demostrada la primera part del gran lema de Schröter, o sia que la secció de potencia (p_3) de (a) i (b) passa pel punt O d'intersecció de (g_1) i (g_2) .

§ 35. — Per a provar la segona part tracem la secció (q_3) que passa per O i és tangent en M_3 a (x_1) i (x_2) . Ja hem vist que'l feix $[m_3, m'_3, \overline{M}_3(x_1), \overline{M}_3(y_3)]$ és harmònic (28); i com que per definició $\overline{M}_3(x_1) = \overline{M}_3(q_3)$ tindrem que també serà harmònic per identitat amb l'anterior el feix de quatre rectes $[m_3, m'_3, \overline{M}_3(q_3), \overline{M}_3(y_3)]$, i en virtut del lema V, el feix $[o', o, \overline{O}(q_3), \overline{O}(y_3)]$ serà harmònic, puix O és el segon punt d'intersecció de (q_3) i (y_3) . Per altra part com que la secció $(OA_1B_2K_3)$ té el seu pla passant pel pol P_3 del pla de (p_3) , aqueixes dues seccions (p_3) i $(OA_1B_2K_3)$ estan en plans conjugats i en virtut del lema VI, corol·lari 1.^{er} es tallaràn ortogonalment, o sia, el feix de quatre rectes $[o', o, \overline{O}(p_3), \overline{O}(OA_1B_2K_3)]$ serà harmònic; mes ja hem vist que les seccions (y_3) i $(OA_1B_2K_3)$ eren tangents en O (§ 33), o sia $\overline{O}(y_3) = \overline{O}(OA_1B_2K_3)$ i tindrem que'l feix $[o', o, \overline{O}(p_3), \overline{O}(OA_1B_2K_3)]$ és idèntic al feix $[o', o, \overline{O}(p_3), \overline{O}(y_3)]$ i aquest serà, doncs, harmònic. Podrem, doncs, establir la següent relació projectiva de dos feixos harmònics que hem trobat

$$[o', o, \overline{O}(q_3), \overline{O}(y_3)] \overline{\wedge} [o', o, \overline{O}(p_3), \overline{O}(y_3)] \quad (39)$$

que puix tenen tres raigs comuns, ens dóna $\overline{O}(q_3) = \overline{O}(p_3)$, relació que expressa que (p_3) i (q_3) tenen en O la mateixa tangent, com devíem provar conforme a la segona part del lema.

§ 36. COROL·LARI (Schröter). — D'aquest gran lema desprengué Schröter un gran corol·lari, importantíssim per a la demostració de la construcció de Steiner. Diu així:

La secció (g_1) (secció de Schröter), és isogonal a les cinc seccions (q_2) , (q_3) , (p_2) , (p_3) i (a) . Car per passar per M_2 és isogonal a les tres seccions tangents $(x_1)(x_3)(q_2)$; per passar per M_3 a les tres $(x_1)(x_2)(q_3)$; per passar per B_3 a les dues tangents $(x_3)(a)$; per passar per C_2 a les dues tangents $(x_2)(a)$ i per passar per O als dos parells de seccions tangents $(p_2)(q_2)$ i $(p_3)(q_3)$; comparant entre elles eixes isogonalitats, veiem que sempre n'hi ha dues amb una secció comú, sense que cap quedi sens altra amb què relacionar-la; queda doncs, provat, el corol·lari.

DEMOSTRACIÓ DE LA CONSTRUCCIÓ DE STEINER, § 36. — Suposem, doncs, donades tres seccions planes qualsevolga (a) , (b) i (c) damunt d'una quàdriga; i suposem trobades tres altres seccions de Malfatti (x_1) , (x_2) , (x_3) , tangents a si mateixes i als parells $(b)(c)$, $(a)(c)$ i $(a)(b)$ respectivament. Sien M_1 el punt de contacte de $(x_2)(x_3)$, M_2 de $(x_1)(x_3)$ i M_3 de $(x_1)(x_2)$; i també B_1 el punt de contacte de $(x_1)(c)$ i C_1 de $(x_1)(b)$; A_2 el de $(x_2)(c)$ i C_2 el de $(x_2)(a)$; A_3 el de $(x_3)(b)$ i B_3 el de $(x_3)(a)$. El punts M_2 i M_3 són de contacte de (x_1) amb (x_2) i (x_3) respectivament; la recta, doncs, M_2M_3 passa pel vèrtex del con que conté (x_2) i (x_3) (Lema V, corol·lari 3.^{er}). També C_2 i B_3 són de contacte d'una mateixa secció (a) amb (y_2) i (x_3) respectivament; també, doncs, la recta C_2B_3 passa pel vèrtex del mateix con que conté (x_2) i (x_3) . M_2M_3 i C_2B_3 es tallaràn, doncs, en aqueix vèrtex; els quatre punts $M_2M_3C_2B_3$ estàn, doncs, en un mateix pla i per ells passa una secció (g_1) isogonal a (x_2) i (x_3) i també a llurs tangents en els punts d'intersecció (x_1) i (a) . Altra secció podríem traçar pel mateix procediment (g_2) per $M_1M_3C_1A_3$ isogonal a (x_1) i (x_3) i també a llurs tangents (x_2) i (b) . Les seccions (g_1) i (g_2) es troben en les condicions assignades en el lema XI; ultra, doncs, el punt M_3 tindran un altre punt comú O_3 que pertany a la secció de potencia (p_3) de (a) i (b) ; i en dit punt O_3 , (p_3) és tangent a una secció (q_3) del feix $(x_1)(x_2)$ que passi per O_3 . De la mateixa manera trobaríem que $M_1M_2B_1A_2$ estàn en una secció plana (g_3) , isogonal a $(x_1)(x_2)$ i també a (x_3) i (c) ; (g_1) i (g_3) es tallen en M_2 i en altre nou punt O_2 de la secció de potencia (p_2) de (a) i (c) i en dit punt O_2 , (p_2) és tangent a la secció (q_2) del feix $(x_1)(x_3)$ que passa per O_2 ; (g_2) i (g_3) es tallen en M_1 i en un nou punt O_1 de la secció de potencia (p_1) de (b) i (c) i en aquest punt O_1 (p_1) és tangent a la secció (q_1) del feix $(x_2)(x_3)$ que passa per O_1 .

§ 37. — Les seccions (a) , (b) i (c) pertanyen a una ret de còniques damunt de la quàdriga, el centre de la qual és el punt d'intersecció R dels tres plans (a) , (b) i (c) . A aqueixa ret pertanyen les tres seccions (p_1) , (p_2) i (p_3) de potencia dels parells $(b)(c)$, $(a)(c)$ i $(a)(b)$, car hem vist en el lema II que les seccions de potencia pertanyen al feix que formen les seccions donades; (p_1) és, doncs, del feix $(b)(c)$, (p_2) del feix $(a)(c)$ i (p_3) del feix $(a)(b)$. Hem vist, a més, en el lema VII que els tres centres dels cons que passen per $(b)(c)$, $(a)(c)$ i $(a)(b)$ estàn en línia recta; els plans,

doncs, de (p_1) , (p_2) i (p_3) que, per definició, són els polars de dits centres, passaràn per la recta polar de la dels centres, cosa que ens prova que (p_1) , (p_2) i (p_3) pertanyen a un mateix feix de la ret R . En el feix $(x_2)(x_3)$ podem pendre una secció (s_1) que pertanyi també a la ret R , per la qual cosa és suficient fer passar un pla per R i la tangent comú en M_1 a (x_2) i (x_3) ; i de la mateixa manera podríem trobar les seccions (s_2) del feix $(x_1)(x_3)$ i (s_3) del feix $(x_1)(x_2)$ i també de la ret R . Aqueixes tres seccions (s_1) , (s_2) i (s_3) pertanyen a un mateix feix, car llurs plans passen tots per R i pel punt X d'intersecció dels tres plans de (x_1) , (x_2) i (x_3) , puix aquest punt X pertany a les tres interseccions que són les tres tangents en M_1 al parell $(x_2)(x_3)$, en M_2 al parell $(x_1)(x_3)$ i en M_3 al parell $(x_1)(x_2)$, per les quals tangents precisament hem fet passar els plans de (s_1) , (s_2) i (s_3) respectivament.

§ 38.—Segons el corol·lari del lema XI de Schröter (g_1) és isogonal a les cinc seccions (q_2) , (q_3) , (p_2) , (p_3) i (a) ; podem afegir les (s_2) i (s_3) tangents respectivament a (q_2) i (q_3) en els dos punts M_2 i M_3 d'intersecció de les mateixes amb (g_1) . Tenim, doncs, que (a) , (p_2) , (p_3) , (s_2) i (s_3) estan en les condicions imposades en el lema VIII; segons ell, doncs, hi haurà un feix de seccions isogonals a totes cinc seccions (a) , (p_2) , (p_3) , (s_2) i (s_3) . Una secció, doncs, (f_1) tangent a (a) , (p_2) i (p_3) ho serà també a (s_2) i (s_3) . Aiximateix trobaríem una secció (f_2) tangent a (b) , (p_1) , (p_3) , (s_1) i (s_3) i altra secció (f_3) tangent a (c) , (p_1) , (p_2) , (s_1) i (s_2) . Fàcilment es dedueix del que hem dit la construcció de Steiner:

Donades les seccions (a) , (b) i (c) , hom busca les seccions de potencia (p_1) de $(b)(c)$, (p_2) de $(a)(c)$ i (p_3) de $(a)(b)$ [la construcció la subministren els lemes I i II]; hom traça les tres seccions (f_1) tangent a (a) , (p_2) i (p_3) , (f_2) tangent a (b) , (p_1) i (p_3) , (f_3) tangent a (c) , (p_1) i (p_2) [les quals construccions ens les dóna el lema VII]; hom traça les seccions de la ret de $(a)(b)(c)$, que siguin (s_1) tangent a (f_2) i (f_3) com (p_1) i pertanyent al mateix con $(f_2)(f_3)$, (s_2) tangent a (f_1) i (f_3) com (p_2) i també pertanyent al mateix con $(f_1)(f_3)$, i (s_3) tangent a (f_1) i (f_2) com (p_3) i també pertanyent al mateix con $(f_1)(f_2)$. Les seccions (x_1) tangent a (b) , (c) , (s_2) i (s_3) ; (x_2) tangent a (a) , (c) , (s_1) i (s_3) ; (x_3) tangent a (a) , (b) , (x_1) i (x_2) són les tres seccions de Malfatti que cerquem.

NOTES BIBLIOGRÀFIQUES I ACLARACIONS

I. — SOLUCIÓ TRIGONOMÈTRICA

Les equacions de Cayley són

$$\left. \begin{aligned} \alpha X^2 + \beta Y^2 + 2\zeta XY &= \gamma \tau^2 \Gamma \\ \alpha X^2 + \gamma Z^2 + 2\eta XZ &= \beta \tau^2 B \\ \beta Y^2 + \gamma Z^2 + 2\xi YZ &= \alpha \tau^2 A \end{aligned} \right\} (40) \quad \begin{aligned} \alpha\beta - \zeta^2 &= \Gamma & \eta\zeta - \alpha Z &= \Xi \\ \alpha\gamma - \eta^2 &= B & \zeta\xi - \beta H &= H \\ \beta\gamma - \xi^2 &= A & \xi\eta - \gamma \Xi &= Z \end{aligned}$$

Llur solució general és

$$\left. \begin{aligned} X^2 &= \frac{1}{2} \tau^2 \frac{(Z + \sqrt{AB})(H + \sqrt{A\Gamma})}{\Xi + \sqrt{B\Gamma}} = \frac{\tau^2}{2\alpha} (\alpha\beta\gamma - \xi\eta\zeta + \xi\sqrt{B\Gamma} - \eta\sqrt{A\Gamma} - \zeta\sqrt{AB}) \\ Y^2 &= \frac{1}{2} \tau^2 \frac{(\Xi + \sqrt{B\Gamma})(Z + \sqrt{AB})}{H + \sqrt{A\Gamma}} = \frac{\tau^2}{2\beta} (\alpha\beta\gamma - \xi\eta\zeta - \xi\sqrt{B\Gamma} + \eta\sqrt{A\Gamma} - \zeta\sqrt{AB}) \\ Z^2 &= \frac{1}{2} \tau^2 \frac{(H + \sqrt{A\Gamma})(\Xi + \sqrt{B\Gamma})}{Z + \sqrt{AB}} = \frac{\tau^2}{2\gamma} (\alpha\beta\gamma - \xi\eta\zeta - \xi\sqrt{B\Gamma} - \eta\sqrt{A\Gamma} + \zeta\sqrt{AB}) \end{aligned} \right\} (41)$$

Si fem $X^2 = x$, $Y^2 = y$, $Z^2 = z$, $\alpha = p - a$, $\beta = p - b$, $\gamma = p - c$, $\xi = \eta = \zeta = \frac{1}{\tau^2} = r$ les equacions (40) es transformarien en les equacions (3), i les (41) ens donarien expressions per als radis dels cercles de Malfatti, que Tèdènat havia ja trobat simplificades.

FÓRMULES DE TÈDÈNAT

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \frac{(r + m_2 - (p - b))(r + m_3 - (p - c))}{r + m_1 - (p - a)} & rm_1 &= \sqrt{((p - a)(p - b) - r^2)((p - a)(p - c) - r^2)} \\ y &= \frac{1}{2} \frac{(r + m_3 - (p - c))(r + m_1 - (p - a))}{r + m_2 - (p - b)} & rm_2 &= \sqrt{((p - a)(p - b) - r^2)((p - c)(p - b) - r^2)} \\ z &= \frac{1}{2} \frac{(r + m_1 - (p - a))(r + m_2 - (p - b))}{r + m_3 - (p - c)} & rm_3 &= \sqrt{((p - a)(p - c) - r^2)((p - b)(p - c) - r^2)} \end{aligned} \right\} (42)$$

Fent en les equacions (40) de Cayley $X^2 = u$, $Y^2 = v$, $Z^2 = w$, $\alpha = \beta =$

$\gamma=1$, $\xi=\sqrt{\frac{p-a}{p}}$, $\eta=\sqrt{\frac{p-b}{p}}$, $\zeta=\sqrt{\frac{p-c}{p}}$, $\tau^2=p$ les equacions (40) es transformen en les (4), i les (41) en donarien les

FÓRMULES DE MALFATTI

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(p-r+m_1-m_2-m_3) & m_1 &= \sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}} = \sqrt{(p-a)^2+r^2} \\ v &= \frac{1}{2}(p-r-m_1+m_2-m_3) & m_2 &= \sqrt{\frac{(p-b)ac}{p}} = \sqrt{(p-b)^2+r^2} \\ w &= \frac{1}{2}(p-r-m_1-m_2+m_3) & m_3 &= \sqrt{\frac{(p-c)ab}{p}} = \sqrt{(p-c)^2+r^2} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

I fent en les fórmules de Tèdènat

$$\xi = \frac{1}{2}(r+m_1-(p-c)) \quad , \quad \eta = \frac{1}{2}(r+m_2-(p-b)) \quad , \quad \zeta = \frac{1}{2}(r+m_3-(p-c))$$

obtindriem les

FÓRMULES DE PAUCKER

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\eta\zeta}{\xi} & y &= \frac{\zeta\xi}{\eta} & z &= \frac{\xi\eta}{\zeta} & \left. \begin{aligned} u &= \xi - \eta - \zeta + p - a \\ v &= \eta - \zeta - \xi + p - b \\ w &= \zeta - \xi - \eta + p - c \end{aligned} \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

Mes entre totes les expressions la més senzilla és la de Crelle.

FÓRMULES DE CRELLE

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{r}{2} \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}} & y &= \frac{r}{2} \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}} \\ z &= \frac{r}{2} \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4}} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

éssent α, β, γ els tres angles del triangle.

I entre totes les construccions la de Schellbach; fem en les equacions (4)

$$\begin{array}{l} a=p \operatorname{sen}^2 \varphi \quad b=p \operatorname{sen}^2 \chi \quad c=p \operatorname{sen}^2 \psi \\ \text{d'on} \quad p-a=p \cos^2 \varphi \quad p-b=p \cos^2 \chi \quad p-c=p \cos^2 \psi \end{array}$$

Les equacions (4) prenen la forma

$$\left. \begin{array}{l} u+v+2 \cos \psi \sqrt{uv}=p \operatorname{sen}^2 \psi \\ u+w+2 \cos \chi \sqrt{uw}=p \operatorname{sen}^2 \chi \\ v+w+2 \cos \varphi \sqrt{vw}=p \operatorname{sen}^2 \varphi \end{array} \right\} \quad (46)$$

Si posem $\varphi + \chi + \psi = 26$ les fórmules (43) de Malfatti es reduirien a

$$u=p \operatorname{sen}^2 (6-\varphi) \quad v=p \operatorname{sen}^2 (6-\chi) \quad w=p \operatorname{sen}^2 (6-\psi) \quad (47)$$

que són les fórmules de Schellbach.

Per les notes bibliogràfiques es pot consultar la llarga llista de la Memoria de Kurt Loeber.

També pot veure's en aqueixa Memoria fórmules trigonomètriques per al cas del triangle esfèric.

II. — LES SOLUCIONS DEL PROBLEMA DE MALFATTI

§ 1. — Si es considera el problema de Malfatti sota la condició que els tres cercles siguin interiors al triangle donat (la qual cosa es dedueix del primitiu enunciat), el problema admet una sola solució, i aqueixa és sempre real. La disposició dels cercles és la que hem vist en les anteriors figures.

Mes si solament posem la condició de l'enunciat general, el problema admet trentadues solucions. Per trobar-les és suficient considerar qualsevol dels quatre centres de cercles (inscrit o dels tres exinscrits), i en qualsevol dels tres triangles que forma dit centre amb els tres vèrtexs podem considerar un cercle inscrit o exinscrit dels quatre que hi ha. En altre dels tres triangles sempre pot trobar-se dos cercles que per a satisfer el segon lema d'Hart siguin vistos del vèrtex comú (a més del centre del cercle inscrit) *sota el mateix angle*; i en el tercer triangle trobarem un sol cercle que sigui vist dels vèrtexs corresponents sota el mateix angle que els dos ja traçats.

Per donar un quadre sinòptic d'aqueixes trentadues solucions, anomenarem O , O_A , O_B i O_C els quatre centres dels cercles inscrit o exinscrits en el triangle ABC ; i (OAB) representarà el cercle en el triangle OAB

i (OAB) l'exinscrit en el mateix triangle oposat al vèrtex A , i així amb els altres. Segons el principi establert trobarem vuit solucions amb cada centre O ; i els cercles (a_1) , (b_1) , (c_1) que'ns serviràn per traçar-les, podràn escollir-se d'aquestes trentadues formes, que'ns donen les solucions (fig. 4.^a):

O	(OBC)	(OAC)	(OAB)	I figura,
	(OBC)	(OAC)	(OAB)	II »
	(OBC)	(OAC)	(OAB)	III »
	(OBC)	(OAC)	(OAB)	IV »
	(OBC)	(OAC)	(OAB)	II »
	(OBC)	(OAC)	(OAB)	IV »
	(OBC)	(OAC)	(OAB)	II »
	(OBC)	(OAC)	(OAB)	IV »

En aquestes vuit solucions corresponent el centre del cercle inscrit O , els cercles de Malfatti són interiors als angles del triangle, segons es veu en les quatre primeres disposicions.

Si prenem el centre O_A trobarem les vuit solucions (fig. 4 bis):

O_A	$(O_A BC)$	$(O_A AC)$	$(O_A AB)$	V figura
	$(O_A BC)$	$(O_A AC)$	$(O_A AB)$	VI »
	$(O_A BC)$	$(O_A AC)$	$(O_A AB)$	VII »
	$(O_A BC)$	$(O_A AC)$	$(O_A AB)$	VIII »
	$(O_A BC)$	$(O_A AC)$	$(O_A AB)$	IX »
	$(O_A BC)$	$(O_A AC)$	$(O_A AB)$	X »
	$(O_A BC)$	$(O_A AC)$	$(O_A AB)$	IX »
	$(O_A BC)$	$(O_A AC)$	$(O_A AB)$	X »

i anàlogues disposicions trobaríem per O_B i O_C ; i en totes elles els cercles de Malfatti corresponents es troben en l'interior de l'angle A del que s'hagi pres la bisectriu interior $O_A A$ o en l'oposat pel vèrtex, i en l'exterior, o sigui en els suplementaris dels angles B i C dels que s'hagin pres les bisectrius exteriors $O_A B$ i $O_A C$.

La disposició I és triplement simètrica i per això no'ns dona més que una solució, i igualment la disposició III. Les II, IV, V, VI, VII i VIII són simplement simètriques i ens donen tres solucions cada una. Les IX i X són asimètriques i per això cada una ens dona sis solucions. Així s'obtenen les trentadues solucions, sempre reals totes.

En el cas del triangle esfèric les solucions se dupliquen per les mètriques respecte el centre de l'esfera i resulten, doncs seixantaquatre, totes també reals, com veurem per un anàlisi idèntic a l'establert per al triangle rectilini. Això ens donaria per medi d'una projecció estereogràfica seixantaquatre solucions també reals per al cas de tres cercles en el pla que tin-

guessin un centre radical interior. Però si el centre radical és exterior les solucions poden fer-se imaginaries; l'estudi d'aquesta discussió es troba en moltes memòries i no té res de particularment interessant. Fent un altra projecció damunt una esfera o d'una quàdriga trobaríem seixantaquatre solucions per al problema més generalitzat, sempre reals si el centre radical de les tres seccions és interior a la superfície (que ha d'ésser per aquest cas no-reglada), però molt difícil de discutir en els altres casos.

L'escriptor del seminari de Strasbourg, Andreas Pampuch, entre altres, és el que més ha estudiat aqueixes solucions i generalitzacions ja determinades per Steiner. Hom pot trobar notes bibliogràfiques completes en la ja citada memòria de Loeber.

§ 2. — També determinà Steiner les quarantavuit solucions del problema *degradat*, o sia quan un dels costats del triangle és la tangent comú interior de dos dels cercles de Malfatti que cerquem. Ja hem donat en el § 13 el mètode general; i discutint la solució trobarem que podem pendre qualsevol dels sis bisectrius (interiors o exteriors) del triangle donat, i en un dels dos triangles en què aqueixa bisectriu divideix el primitiu podem considerar qualsevol dels cercles inscrits o exinscrits; en l'altre triangle sempre hi haurà un i sol un cercle inscrit o exinscrit que compleixi la condició d'ésser vist del mateix angle que l'anterior del vèrtex de la bisectriu que hem pres tenint el costat oposat com a tangent comú interior. Això ens donaria vintiquatre solucions, si cadaun dels parells de cercles no ens donés dues en lloc d'una que solament obteníem en el cas veritable; així és que'l problema admet les quarantavuit solucions de Steiner. Mes no totes deuen ésser reals; algunes poden ésser impossibles de construir.

Per classificar-les considerem la bisectriu interior AA' (i la mateixa cosa faríem amb BB' i CC') i tracem cercles inscrits (c) i (b) en els triangles $AA'B$ i $AA'C$, segons la notació adoptada en el paragraf anterior (fig. 5.^a).

AA'	$(AA'B)$	$(AA'C)$	}	I i II figures.
	$(AA'B)$	$(AA'C)$	}	
	$(AA'B)$	$(AA'C)$	}	
	$(AA'B)$	$(AA'C)$	}	(poden ésser imaginaries).

Si prenem la bisectriu exterior AA'' obtindrem altres vuit solucions; llurs cercles auxiliars poden ésser escollits de quatre formes, a cadauna de les quals corresponen dues solucions (fig. 5.^a bis).

AA''	$(AA''B)$	$(AA''C)$	}	III i IV figures.
	$(AA''B)$	$(AA''C)$	}	V i VI »
	$(AA''B)$	$(AA''C)$	}	III i IV »
	$(AA''B)$	$(AA''C)$	}	V i VI »

§ 3. — La discussió del problema *degradat* que proposàrem en el § 14 és molt senzilla. Podrem pendre damunt d'un qualsevol costat AB del triangle qualsevol dels quatre punts de contacte amb els cercles inscrits i exinscrits, i cada punt d'aqueixos ens dóna dues solucions del problema que en conté per tal raó vintiquatre. Sis són les figures que poden formar-se: les dues primeres si es pren el punt de contacte del cercle inscrit; les dues segones si el del cercle exinscrit oposat al vèrtex que formen les dues tangents de contacte dels cercles de Malfatti que prenem com costats del triangle; i les dues terceres si qualsevol dels altres dos exinscrits. És curiós observar com també en aquest cas, l'ésser el punt de contacte auxiliar de cercle inscrit o exinscrit implica que els cercles de Malfatti tinguin llur centre en la bisectriu interior o exterior de l'angle corresponent (fig. 6.^a).

En aquest cas veiem que la meitat de les solucions (que són sempre totes reals) són de ternes de cercles de Malfatti, formades per un cercle tangent interiorment a altres dos tangents entre ells exteriorment. Tal figura és impossible que's presenti pel cas propi i el *degenerat* del paragraf anterior, car fóra un triangle imaginari.

Anàlogues observacions podrien fer-se amb triangles esfèrics.

§ 4. — No cal ocupar-se del cas d'ésser les tres tangents de contacte dels cercles de Malfatti els costats del triangle, puix les tres rectes formen un feix i no un triangle, i no podrà trobar-se cap solució en el cas d'un triangle propi.

Tal és l'estudi que hem fet d'aqueix curiosíssim problema. No solament els mètodes han estat objecte de treballs de totes menes, mes encara l'història d'ell ha omplert varies pàgines de revistes tècniques de primer ordre. Les deduccions que's poden treure de la figura de Malfatti són variadíssimes, i manca que no sigui un problema capital i fecund en idees: s'ha de confessar que és un entreteniment agradable, una joguina matemàtica.

ENRIC DE RAFAEL VERHULST, S. J.

Col·legi de S. Ignasi, Sarrià. — Gener 1916.

Figura 1.^a

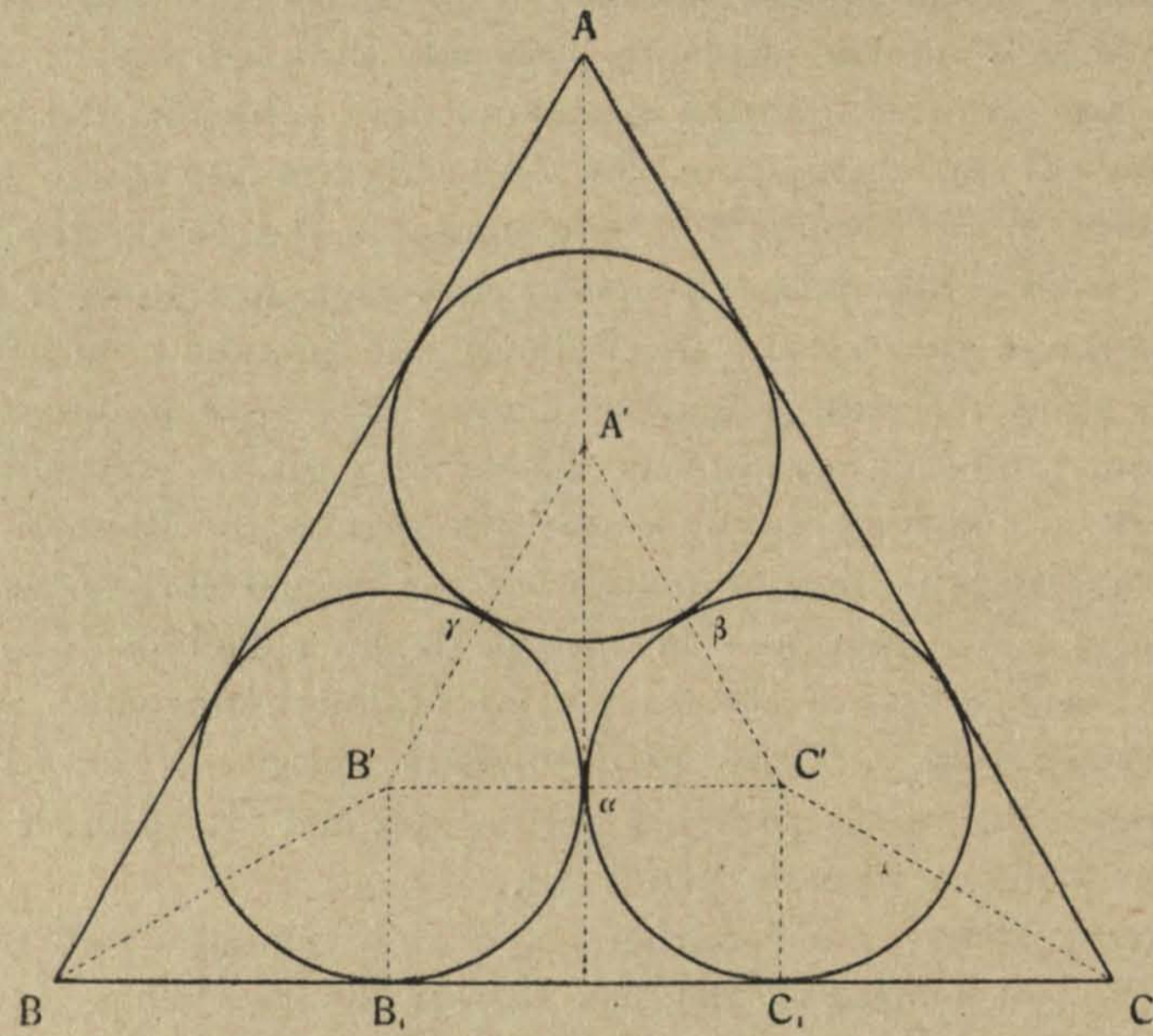


Figura 2.^a

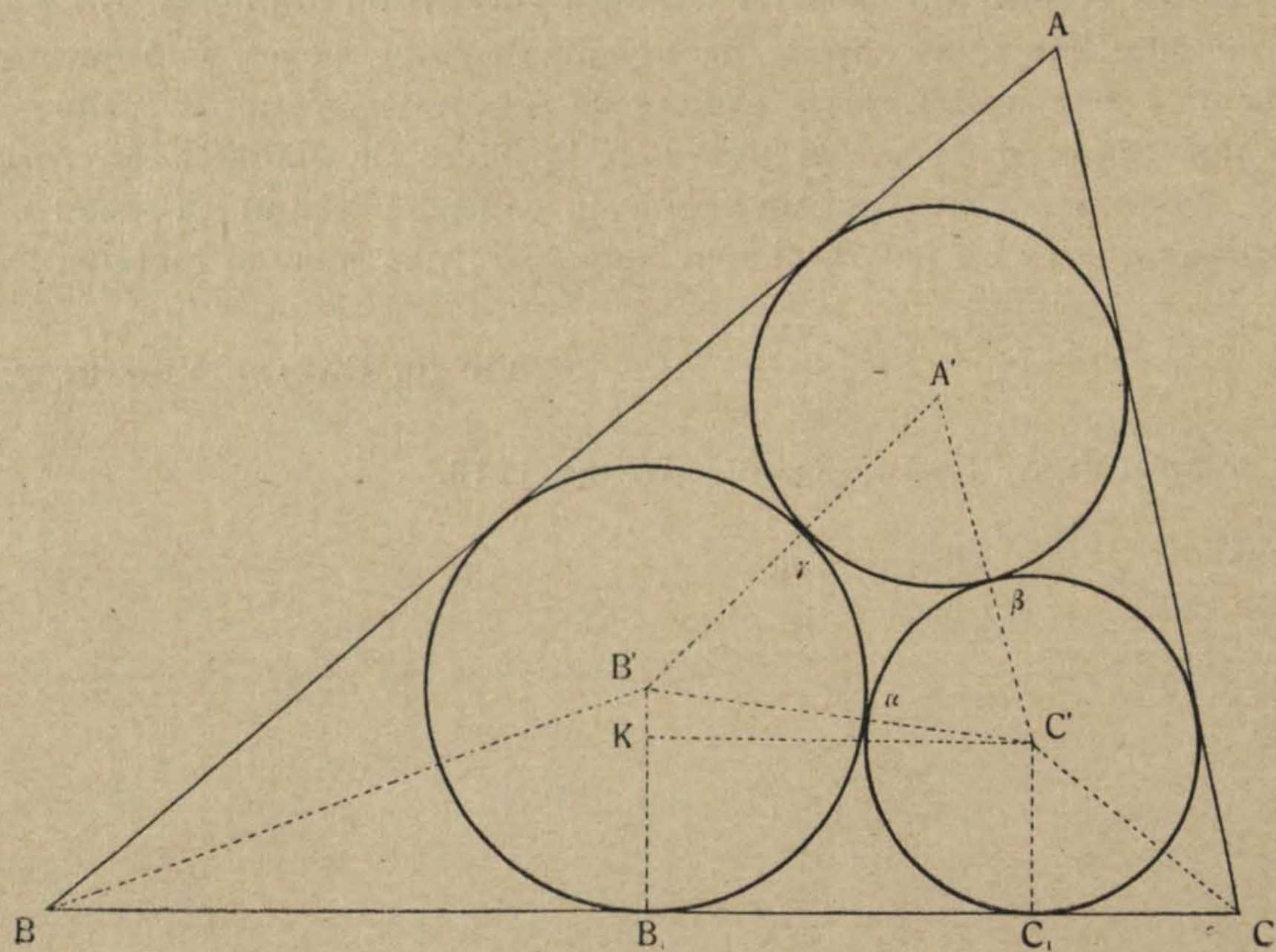


Figura 3.^a

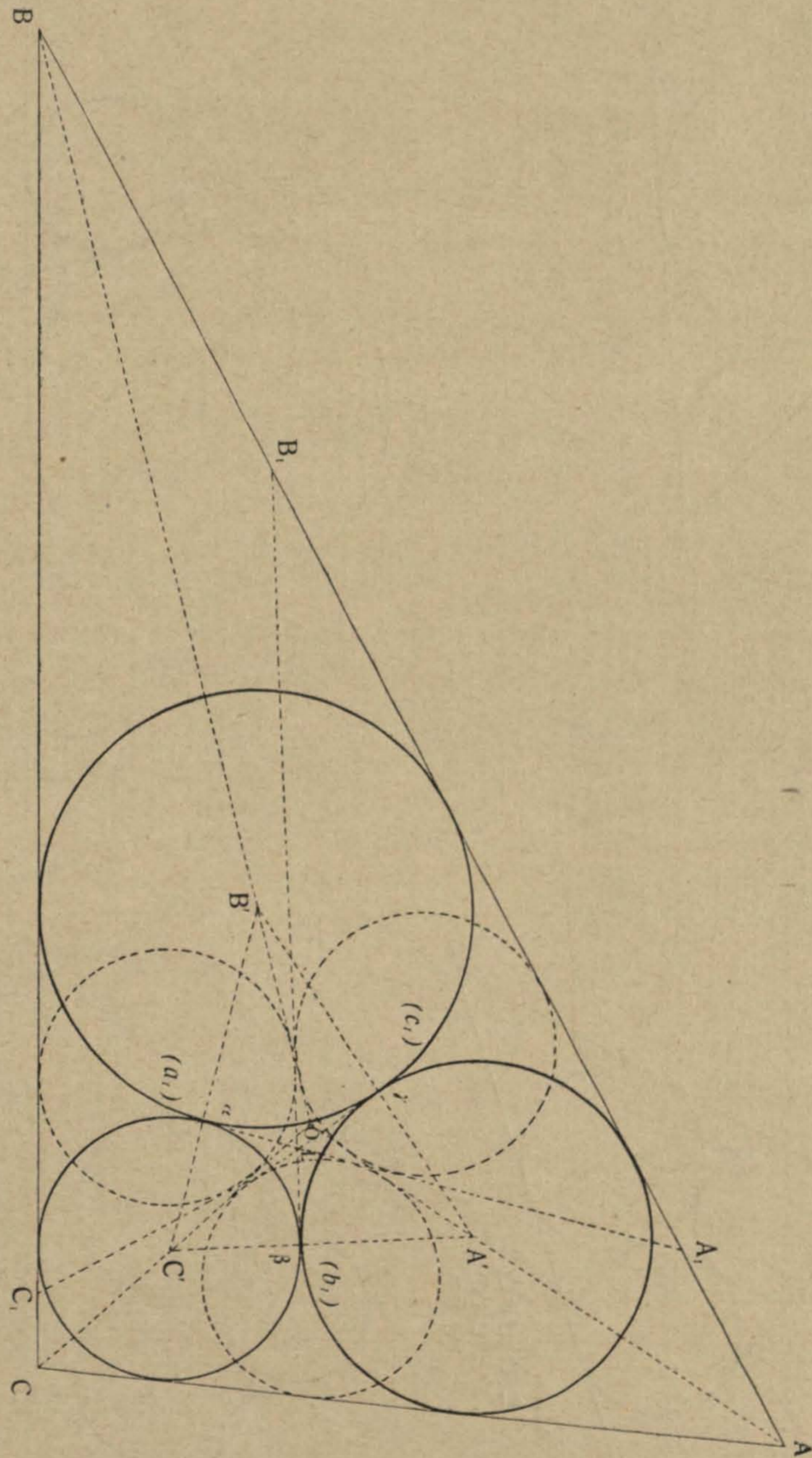


Figura 4.^a

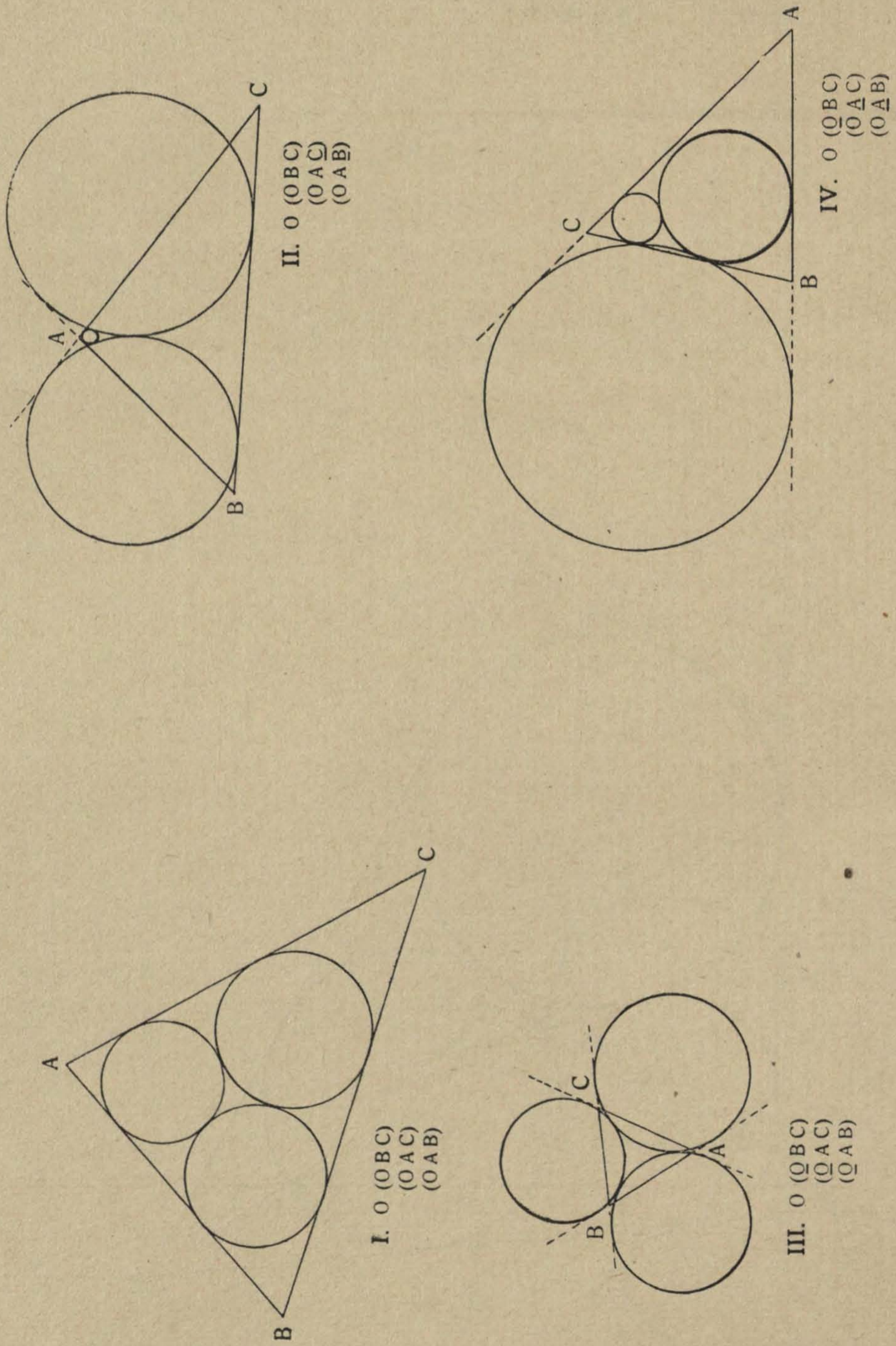


Figura 4.^a bis.

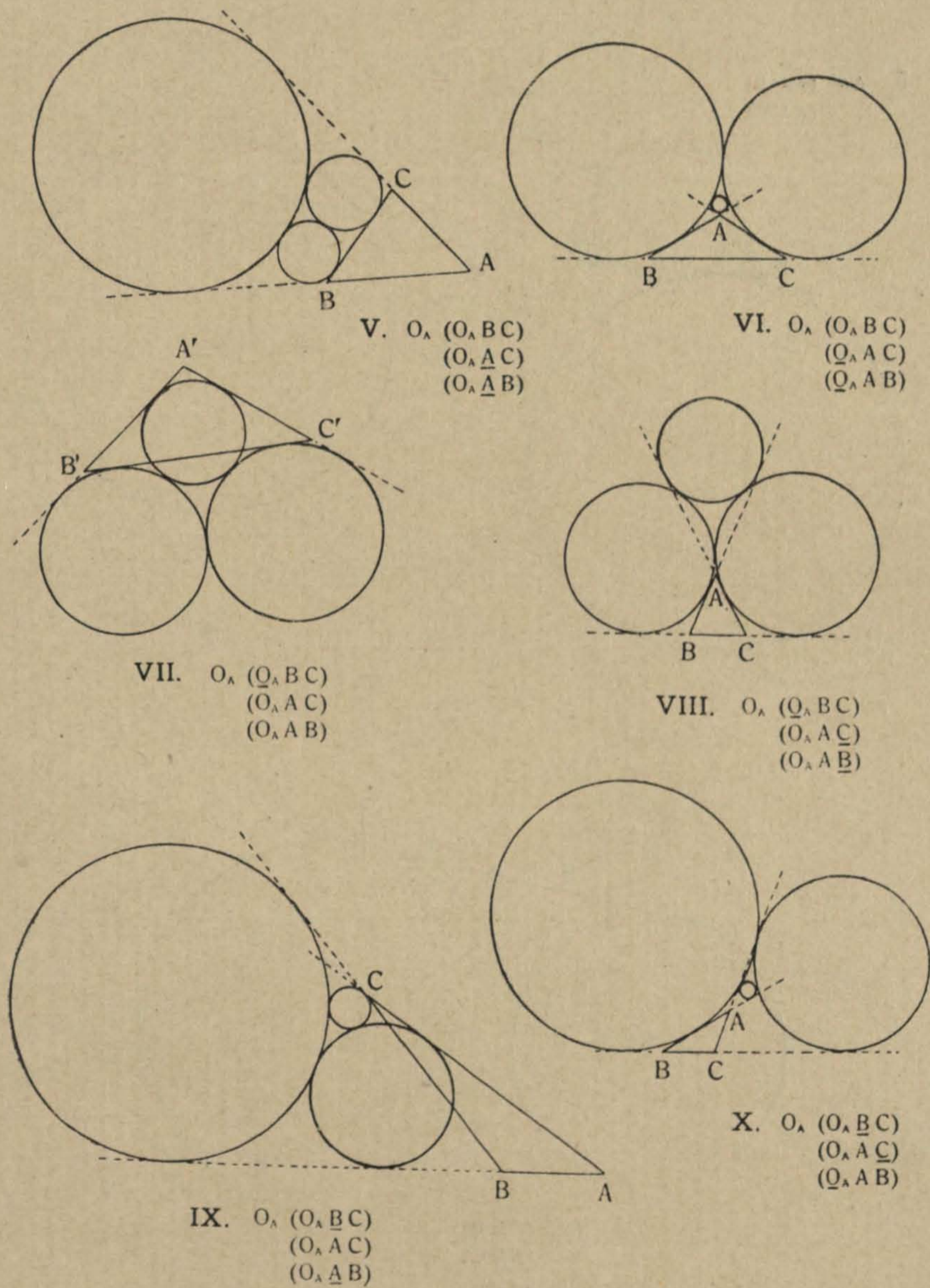


Figura 5.^a

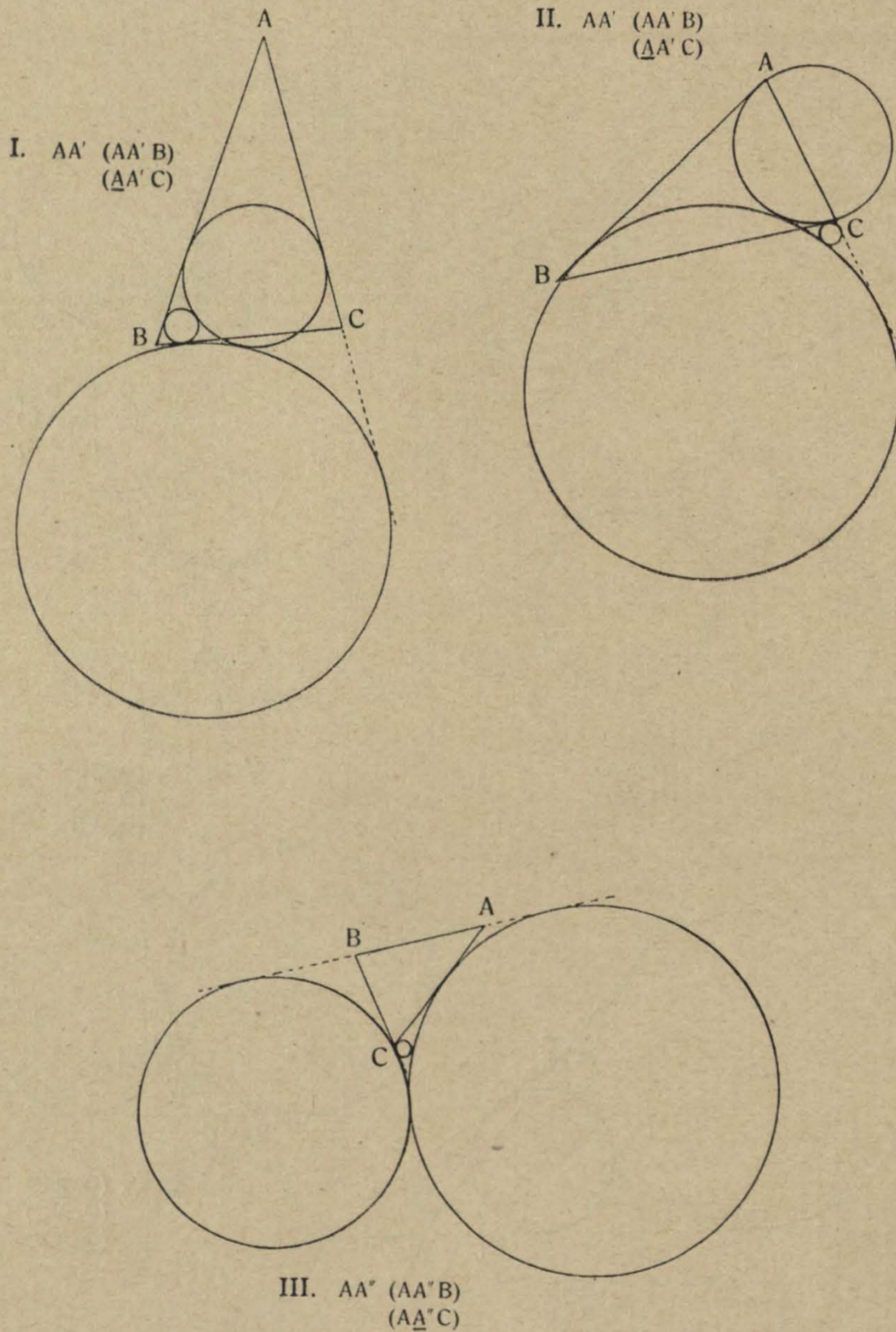
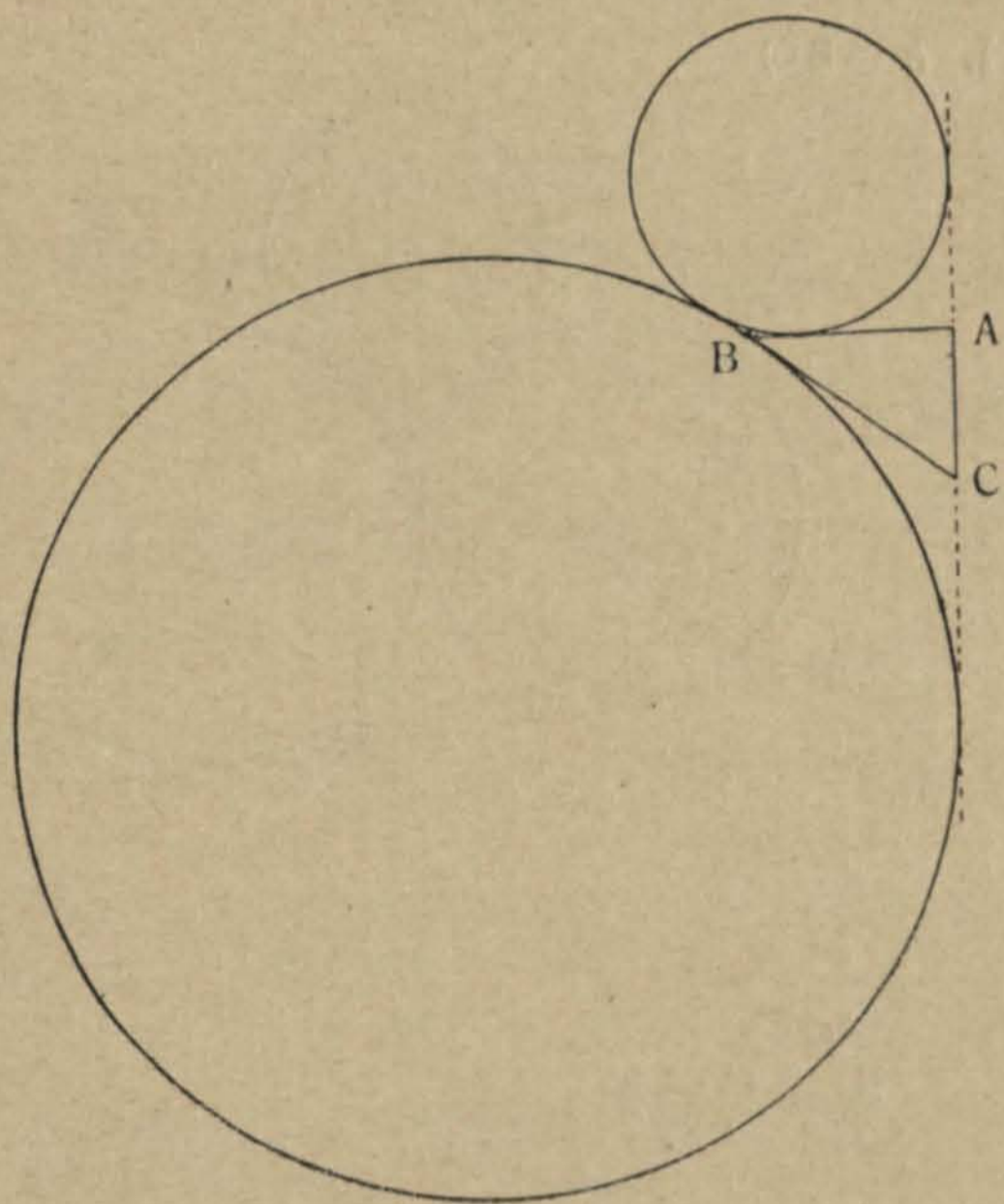


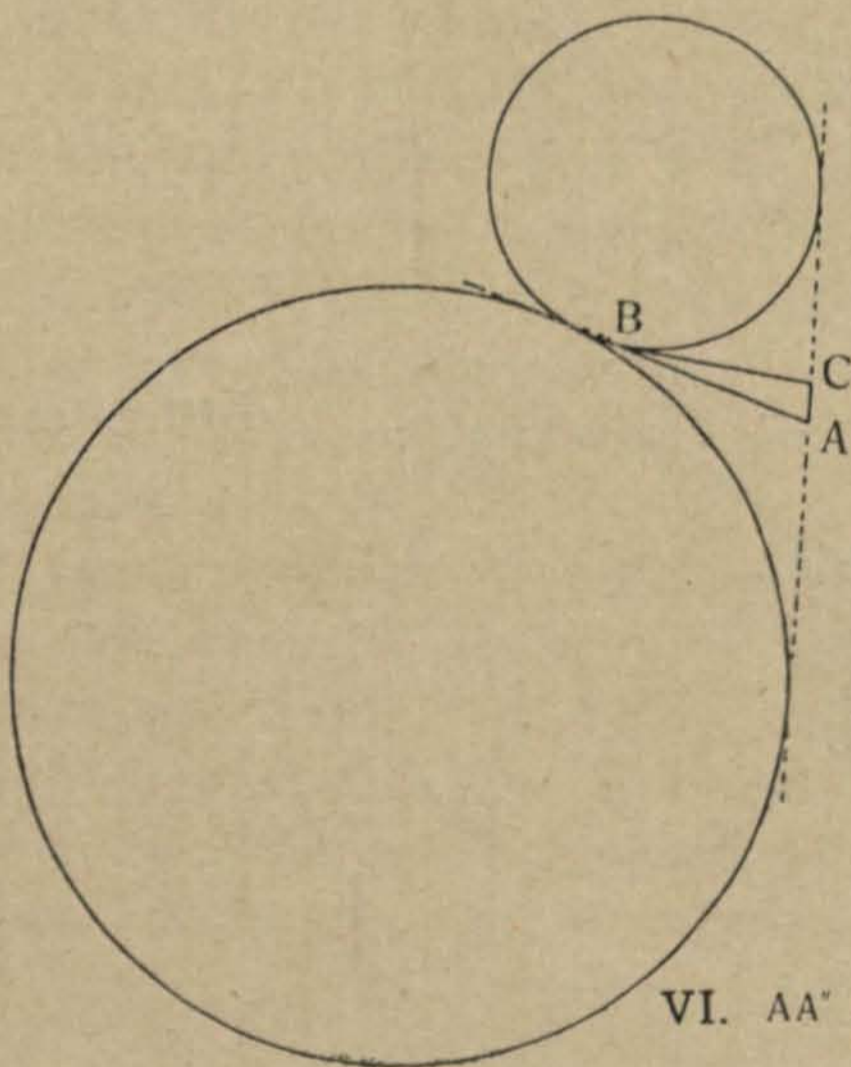
Figura 5.^a bis.



IV. AA^* (AA^*B)
 (AA^*C)



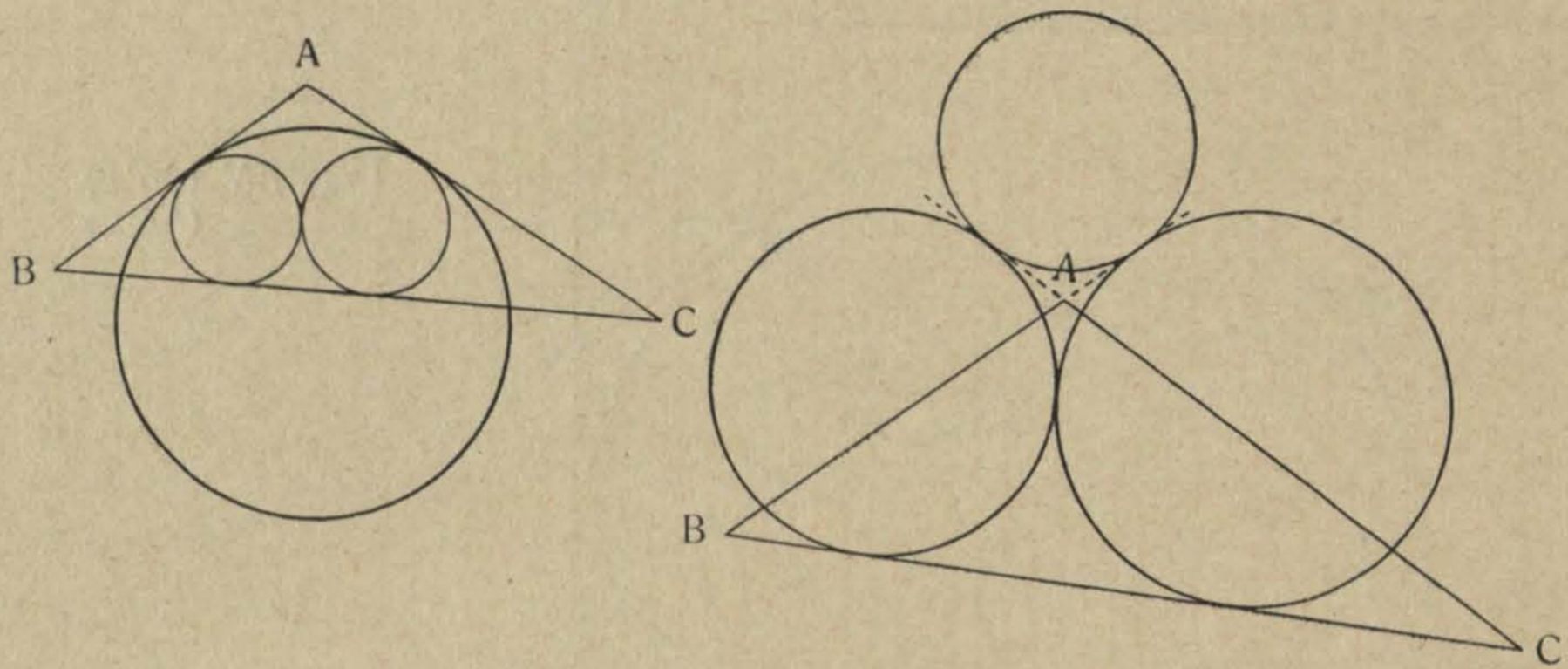
V. AA^* (AA^*B)
 (AA^*C)



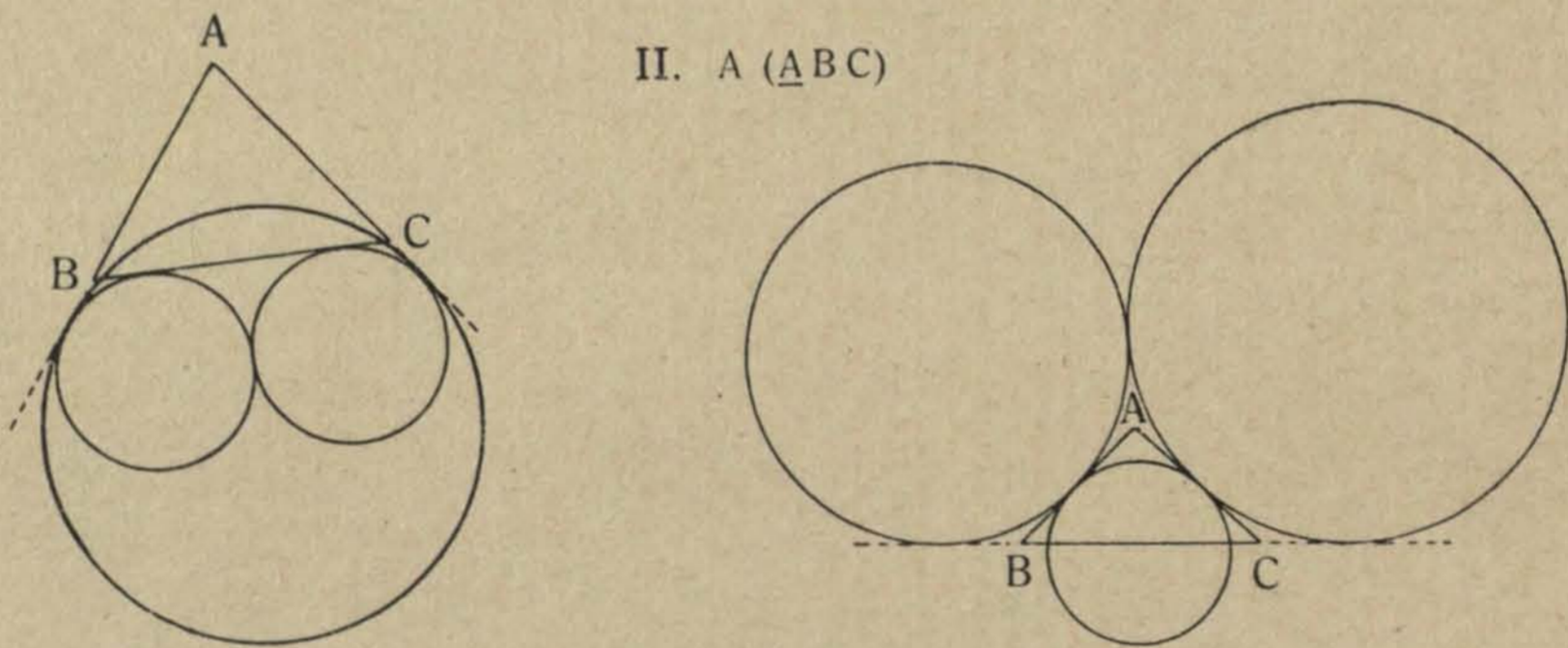
VI. AA^* (AA^*B)
 (AA^*C)

Figura 6.^a

I. A (ABC)



II. A (ABC)



III. A (ABC)

